Zur Kubatur

der

Malus'schen Wellenflächen.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Grossherzoglichen

Universität Rostock

überreicht von

Wilhelm Ruchhöft

aus Rostock.

Greifswald.

—

DRUCK VON F. W. KUNIKE.

1885

Referent:

Herr Professor Dr. **Krause.**

Die von einem leuchtenden Punkte, dem Pole, ausgehenden Lichtstrahlen besitzen nach der Reflexion und Brechung in beliebig vielen, einfach brechenden Medien die Eigenschaft, Normalen einer Schar von Parallelflächen zu sein, denen nach Helmholtz[1]) der Name Wellenflächen zukommt. Da nun Malus[2]) ihre Existenz zuerst nachgewiesen hat, so dürfte die Bezeichnung Malus'sche Wellenflächen im Unterschied von der Fresnel'schen Wellenfläche eine passende sein[3]).

Unter Wellenfläche möge in der Folge diejenige zu einem einmal reflectirten, vorher homocentrischen Strahlensysteme gehörende Malus'sche Wellenfläche verstanden werden, welche durch den leuchtenden Punkt hindurch geht. Sie muss der Huyghens'schen Undulationstheorie gemäss angesehen werden als die Einhüllende einer Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte die reflectirende Oberfläche, die Basis, stetig erfüllen, deren Flächen sämtlich den Pol in sich enthalten[4]).

Zwischen der Wellenfläche und der zu derselben Basis gehörenden Fusspunktfläche besteht ein inniger Zusammenhang. Der geo-

---

1) cf. Helmholtz, phys. Optik; vergl. auch: Röthig „Ueber die durch den Malus'schen Satz definirten Flächen". Crelle. Bd. 84.

2) Malus, Geom. Optik, Journal de l'école polyt. Bd. 7. 1808.

3) Der Verf. wurde mit der im angegebenen Sinne gebrauchten Benennung „Malus'sche Wellenfläche" zuerst in den Vorlesungen des Herrn Prof. Mathiessen bekannt.

cf. Matthiessen „Untersuchung über die Lage der Brennlinieu eines ununendlich dünnen Strahlenbündels gegen einander und gegen einen Hauptstrahl" Acta Math. 4. 1884. pag. 178.

4) Gergonne, Annales T. XVI.

metrische Ort des Endpunktes R des um sich selbst verlängerten Lotes PQ, welches von dem Pole P auf eine beliebige Tangentialebene der Basis gefällt wird, ist mit der Wellenfläche identisch. Letztere kann daher auch angesehen werden als der Ort des virtuellen Bildes, welches die spiegelnde Oberfläche der Basis von dem leuchtenden Punkte entwirft[5]).

Ihre Gestalt ist eine sehr mannigfache. Sie kann in mehrere sich stets im Pole schneidende Oberflächenschalen zerfallen, welche rings geschlossen sind, so lange die Basis eine endliche, rings geschlossene ist, oder wenigstens im Endlichen gelegene Asymptotenkegel besitzt.

Auch ist es bekannt, dass den abwickelbaren Flächen nicht eine Wellenfläche, sondern eine Wellencurve, secundäre Brennlinie, entspricht.

Zur Untersuchung der Malus'schen Wellenfläche führte mich die Theorie der Brennflächen für gebrochene und reflectirte Strahlensysteme, welche im Wintersemester 1883/84 den Hauptgegenstand der Uebungen des mathematischen Seminars der Universität Rostock unter der Leitung des Herrn Professor Krause bildete. Sie schlossen sich an die Kummer'sche Theorie der geradlinigen Strahlensysteme[6]) an, gemäss welcher die Coordinaten der Wellenflächenpunkte sich als Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen u und v darstellen lassen.

Gegen Ende des nächsten Semesters veranlasste Herr Prof. Krause mich, diese Darstellungsform der Kubatur der Wellenflächen zu Grunde zu legen; so zwar dass der leitende Gesichtspunkt der Untersuchung der war, auf anderen als den bisher gebräuchlichen Wegen zur Kubatur der Fusspunktflächen zu gelangen, die nur für wenige Basisflächen durchgeführt ist.

Professor Tortolini[7]) bestimmte 1844 die Oberfläche und das Volumen der Fusspunktflächen des Ellipsoides und der beiden Hyperboloide unter der beschränkenden Annahme, dass der Pol im Mittelpunkte dieser Flächen gelegen ist.

---

5) Bösser, Theorie der caustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Schlömilch's Zeitschr. Bd. 15. 1870.

6) Kummer, Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Crelle. Bd. 57.

7) „Nuove applicazioni del Calcolo Integrale relative alla quadratura delle Superficie curve, e cubatura de Solidi." Crelle. Bd. 31. 1846.

1859 definirte Herr Dr. Fischer[8]) in seiner Dissertation das Volumen der Fusspunktfläche als den Inhalt des Kegels, dessen Spitze der Pol, dessen Basis ein vorgelegtes Oberflächenstück der Fusspunktfläche ist und wies nach, dass bei willkürlicher Wahl der Basis der geometrische Ort der Pole, zu denen ein constantes Volumen der Fusspunktfläche gehört, eine Oberfläche dritter Ordnung ist; dass er aber ein Ellipsoid ist, so bald die Basis die Eigenschaft, in sich geschlossen zu sein, besitzt. Ferner: dass es im ersten Fall höchstens acht Lagen des Poles geben kann, denen ein Maximal- oder Minimalwert des Volumens der Eusspunktfläche entspricht, während im zweiten Fall nur ein solcher Punkt existirt.

Im folgenden Jahre veröffentlichte Herr Dr. Magener[9]) im Archiv einen Aufsatz über die Fusspunktfläche des Ellipsoides, die von ihm gefundenen zahlreichen und interessanten Lehrsätze gedenke ich seiner Zeit anzugeben.

Gleich darauf liess der englische Mathematiker Hirst[10]), F. R. S., eine Abhandlung über die Volumina der Fusspunktflächen erscheinen, die er schon im November 1862 der Royal Society of London vorgelegt hatte. Es werden darin die von Fischer und Magener gefundenen Resultate bestätigt.

Dies ist die ganze Litteratur über die Kubatur der Fusspunktflächen, so dass also, wenn wir uns auf Oberflächen zweiter Ordnung beschränken, die Volumina der Fusspunktflächen der beiden Hyperboloide für allgemeine Lagen des Poles und die Volumina der Fusspunktflächen der beiden Paraboloide überhaupt noch nicht bestimmt sind.

In den beiden letzten Fällen tritt noch die Schwierigkeit hinzu, die Basisflächen und dementsprechend die Fusspunktflächen in passender Weise zu begrenzen.

Die Aufgabe der folgenden Untersuchungen ist es, die Kubatur der Wellenflächen und damit die der Fusspunktflächen nach der von Gauss[11]) entwickelten Methode durchzuführen, wenn die Oberflächen zweiter Ordnung mit Ausnahme der abwickelbaren Flächen als Basis

---

8) „De superficierum pedalium theorematibus quibusdam.“ D. Berlin.

9) „Cubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides.“ Arch. f. Math. u. Phys. Bd. 34. 1860.

10) Hirst „On the volumes of pedal surfaces“. Phil. Transact. Vol. 153, 1863. Vergl. Crelle Bd. 62, 1863. „Sur les volumes des surfaces podaires“. Extr. du mémoire etc.

11) Gauss, Theoria attract. corporum ellips. Sämtl. Werke. Bd. 5.

angenommen werden. Zerfällt die Wellenfläche in rings geschlossene Oberflächenschalen, so bedarf ihr Volumen keiner weiteren Definition. Ist dies nicht der Fall, so sei ihr Volumen mit dem Inhalte des Kegels identisch, dessen Basis ihre Oberfläche, dessen Spitze ihr Pol ist[12]).

§ 1. Darstellung der Coordinaten der Wellenflächenpunkte als Functionen der Veränderlichen u und v[13]).

Es sei eine beliebige Oberfläche vorgelegt und angenommen, dass ihre rechtwinkligen Coordinaten x, y, z sich darstellen lassen als Functionen der beiden Veränderlichen u und v. Ein vom Pol einfallender Strahl, dessen Richtungscosinus λ, μ, ν sind, trifft die Oberfläche in einem Punkte x, y, z und wird reflectirt, so dass er nach der Reflexion mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus ξ, η, ζ sind. Dem Snellius'schen Gesetze gemäss müssen die beiden Strahlen λ, μ, ν; ξ, η, ζ mit der Normalen des Einfallspunktes, dem Einfallslote, α, β, γ in einer Ebene gelegen sein, d. h. sie müssen auf derselben Geraden a, b, c senkrecht stehen. Dieser Bedingung entsprechen die drei Gleichungen

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0$$
$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$
$$\xi a + \eta b + \zeta c = 0$$

oder das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix}$$

Setze ich daher

$$h = \mu\gamma - \nu\beta$$
$$i = \alpha\nu - \lambda\gamma$$
$$k = \lambda\beta - \alpha\mu$$

so lautet die Bedingung

1) $$h\xi + i\eta + k\zeta = 0.$$

Ferner muss der Einfallswinkel absolut genommen dem Reflexionswinkel gleich sein, die Cosinus beider aber tragen das entgegengesetzte Vorzeichen, es besteht daher die Relation

---

12) Fischer a. a. O. pag. 12.

13) Röthig, Crelle Bd. 84. u. 88. stellt die Coordinaten der Malus'schen Wellenfläche eines Strahlensystemes, das beliebig viele Brechungen erlitt, dar als Function der drei Parameter α_1, β_1, γ_1, zwischen denen die Relation $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ besteht.

2) $$\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma = -(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma) = -D.$$

Das Symbol D stellt den Cosinus des Einfallswinkels dar, nun ist aber die Summe $(h^2+i^2+k^2)$ dem Quadrate des Sinus desselben Winkels gleich, die Symbole sind also durch die Gleichung

$$h^2+i^2+k^2+D^2 = 1$$

verbunden.

Aus 1) und 2) lassen sich leicht die folgenden Gleichungen herleiten:

3) $$\begin{aligned} \xi M-\eta.L &= D.k,\\ \eta N-\zeta M &= D.h,\\ \zeta L-\xi N &= D.i, \end{aligned}$$

in welchen die Grössen L, M, N, die Unterdeterminanten bedeutend, auf die folgende Gestalt zurückgeführt werden können

$$\begin{aligned} L &= k\beta-i\gamma = \lambda-\alpha.D,\\ M &= h\gamma-k.\alpha = \mu-\beta.D,\\ N &= i\alpha-h\beta = \nu-\gamma.D, \end{aligned}$$

Es gelten ferner die Relatiooen

$$L^2+M^2+N^2 = L\lambda+M\mu+N\nu = h^2+i^2+k^2 = 1-D^2,$$
$$L\alpha+M\beta+N\gamma = 0,$$

Aus 3) aber folgen die Werte

$$\zeta = \frac{\xi N-iD}{L}, \qquad \eta = \frac{\xi.M-D.k}{L},$$

welche in die Gleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$ eingesetzt für ξ eine quadratische Gleichung ergeben, deren Gestalt vermöge der genannten Relationen auf die folgende reducirt werden kann:

$$\xi^2+2\alpha.D.\xi = \lambda^2-2\alpha\lambda D,$$

aus welcher

4) $$\xi = -\alpha.D\pm(\alpha.D-\lambda)$$

sich ergiebt. Für den Richtungscosinus des reflectirten Strahles kommt nur das untere Vorzeichen in Betracht, da die Wahl des positiven die Wurzel $\xi = -\lambda$ ergiebt, dies aber ist der Richtungscosinus des einfallenden Strahles gegen die X-Axe in der Richtung von der Oberfläche fort gerechnet, wie es sein muss. Das Analoge gilt von den Grössen η und ζ, die Richtungscosinus des reflectirten Strahles sind demnach

$$\xi = \lambda - 2\alpha . D,$$
$$\eta = \mu - 2\beta D, \quad 5)$$
$$\zeta = \nu - 2\gamma . D,$$

wie auch immer die reflectirende Oberfläche beschaffen sein möge.

Der Kummer'schen Theorie gemäss sind dann die Coordinaten der Wellenfläche gegeben durch

$$x_1 = x + r . \xi,$$
$$y_1 = y + r . \eta, \quad 6)$$
$$z_1 = z + r . \zeta,$$

wo r die Entfernung des Einfallspunktes von dem auf demselben Strahle gelegenen Wellenflächenpunkte bedeutet und für sein Differential die Relation besteht:

$$-dr = \xi dx + \eta dy + \zeta . dz. \quad 7)$$

Die Coordinaten x, y, z sind auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, für dessen Lage eine beschränkende Annahme nicht existirt. Ich will nun den Coordinatenanfang in den leuchtenden Punkt hineinverlegen, dann repräsentiren die Quotienten

$$\lambda = \frac{x}{R}, \quad \mu = \frac{y}{R}, \quad \nu = \frac{z}{R} \quad 8)$$

die Richtungscosinus des einfallenden Strahles, so bald

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad 9)$$

gesetzt wird, sind also Functionen von u und v.

Die Gleichungeu 5) und 8) gestatten dem Differentiale 7) die Form zu geben:

$$-dr = \lambda dx + \mu dy + \nu dz - 2D . (\alpha dx + \beta dy + \gamma . dz),$$
$$= \frac{x.dx + y dy + z dz}{R} - \frac{2D}{S}(A dx + B dy + C dz),$$

wenn die Grössen A, B, C die Functionaldeterminanten bedeuten

$$A = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$B = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad 10)$$
$$C = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

und

$$S^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

ist. Setzt man aber für die Differentiale der Coordinaten ihre Werte

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

so folgt

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

und man erhält

11) $$-dr = dR.$$

Es ist unmittelbar einzusehen, dass die Integrationsconstante der Null gleich gesetzt werden muss, da nach der gegebenen Definition der Wellenfläche die Entfernung r eines ihrer Punkte von dem Einfallspunkte xyz ebenso gross ist wie die Entfernung R des Poles von diesem Punkte, beide Strecken gemessen auf dem reflectirten resp. einfallenden Strahle vom Treffpunkte x, y, z aus. Etwas anderes aber behauptet die Gleichung $r = -R$ nicht.

Die Coordinaten der Wellenfläche nehmen vermöge der Substitution $r = -R$ die Gestalt an

12)
$$x_1 = 2.\alpha.D.R = \frac{2A(Ax + By + Cz)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_1 = 2.\beta.D.R = \frac{2B(Ax + By + Cz)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_1 = 2.\gamma.D.R = \frac{2C(Ax + By + Cz)}{A^2 + B^2 + C^2};$$

sie sind demnach unmittelbar Functionen von u und v, so bald für die Coordinaten xyz der Basis diese Darstellungsart gefunden ist.

Wird berücksichtigt, dass α, β, γ die Richtungscosinus der Normalen, die im Einfallspunkte auf der Basis errichtet wird, bedeuten, dass ferner D den Cosinus des Einfallswinkels repräsentirt, so können die Ausdrücke

$$x' = \alpha.D.R,$$
$$y' = \beta.D.R,$$
$$z' = \gamma.D.R$$

unmittelbar geometrisch interpretirt werden, es zeigt sich, dass sie die rechtwinkligen Coordinaten der zu derselben vorgelegten Basis

gehörenden Fusspunktfläche sind, deren Darstellung als Fnnctionen zweier Parameter hierdurch für eine ganz beliebige Basis gegeben wird.

Ausserdem wird durch das vorletzte Gleichungssystem der Zusammenhang zwischen Wellenflächen und Fusspunktflächen von neuem bestätigt.

§ 2.

Ueber die Integrale $\int x.ds.\cos(Nx)$, $\int r.ds.\cos(Nr)$.

Vermöge der Darstellung der Coordinaten der Wellenflächenpunkte als Functionen der beiden Veränderlichen u und v wird die Kubatur auf die Auswertung von Doppelintegralen zurückgeführt.

Ist nun die vorgelegte Oberfläche, deren Volumen bestimmt werden soll, eine rings geschlossene, so stellt nach Gauss[14]) das Integral $\int x.ds.\cos(N,x)$, wenn es über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird, das gesuchte Volumen dar; dabei bedeutet (N,x) den Winkel, welchen die nach aussen gerichtete Normale eines Oberflächenpunktes mit der X-Axe bildet. Denken wir innerhalb der Projectien der Oberfläche auf die ausserhalb der letzteren gelegene Ebene $x = c$ ein Element $d\Sigma$ herausgegriffen, zu ihm senkrecht einen Cylinder errichtet, der die Fläche in $2k$ Elementen ds schneidet, und ist ferner ganz allgemein der Inhalt des Cylinders zwischen der Ebene $x = c$ und dem Flächenstück $ds_l = I_l$, so ist

$$V = \int x.ds.\cos(N,x) = \Sigma(I_{2k} - I_{2k-1} + \ldots I_2 - I_1)$$

das analytische Aequivalent des Volumens.

Dasselbe wird ferner repräsentirt durch das Integral

$$V = -\tfrac{1}{3}\int r.ds.\cos(N,r),$$

wenn (N,r) den Winkel bedeutet, den die nach aussen gerichtete Normale der Fläche mit dem von ihrem Fusspunkte nach dem Pole gezogenen radius vector r bildet.

Ist die Fläche nicht rings geschlossen, so kann zunächst von einem Aussen und Innen nicht die Rede sein. Da nun aber die Fläche $f(x,y,z) = 0$ im Allgemeinen alle die Punkte des Raumes, für welche $f(x,y,z) > 0$ ist, von denen scheidet, die $f(x,y,z)$ kleiner als Null machen, so sind wir berechtigt die Normale, welche sich von der Fläche aus in das erste Gebiet erstreckt, als die nach aussen gerichtete zu bezeichnen. Nehmen wir ferner an, dass das vorgelegte

---

14) Gauss, Theoria attractionis corporum ellipticorum etc. im V. Bd. s. s.W.

Oberflächenstück ein continuirliches ist, so ist unschwer einzusehen, dass ein vom Pol nach der Fläche gezogener radius vector mit den in seinen Treffpunkten construirten und nach aussen gerichteten Normalen der Fläche a wechselnd spitze und stumpfe Winkel bildet. Die Anzahl der Schnittpunkte kann eine gerade, kann eine ungerade sein. Die Richtung des Radius vom Treffpunkte nach dem Pole hin sei die positive. Um den radius vector werde ein Kegel mit der unendlich kleinen Oeffnung $d\Sigma$ construirt, der vom Pole aus betrachtet in den Entfernungen $r_1, r_2, \ldots r_k$ aus der Fläche die Elemente $ds_1, ds_2, \ldots ds_k$ ausschneidet. Um den Pol mögen mit den Radien $r_1, r_2 \ldots r_k$ concentrische Kugeln construirt werden, auf deren Oberflächen der Kegel mit der Oeffnung $d\Sigma$ die Stücke $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_k$ kennzeichnet.

Der Inhalt des Kegels bis zum ersten Schnittpunkte ist

$$I_1 = \tfrac{1}{3} r_1 d\sigma_1 = \pm \tfrac{1}{3} r_1 ds_1 \cos(N_1, r),$$

das Volumen des zweiten wird durch

$$I_2 = \tfrac{1}{3} r_2 d\sigma = \pm \tfrac{1}{3} r_2 ds_2 \cos(N_2, r)$$

gegeben u. s. f. Demgemäss stellt $I_k - I_{k-1} + I_{k-2} - + \ldots I_1$ das Stück des Volumens dar, welches zwischen der Oberfläche und dem unendlich kleinen Kegel gelegen ist. Stellen wir dieselben Operationen für alle Punkte der ungeschlossenen Oberfläche an, so ergiebt sich, dass

$$\tfrac{1}{3} \int r \,.\, ds \,.\, \cos(N, r),$$

erstreckt über die ganze Oberfläche, vom Zeichen abgesehen das Volumen desjenigen Körpers darstellt, der zwischen der Oberfläche und dem Kegel gelegen ist, dessen Basis mit der Oberfläche zusammenfällt, dessen Spitze im Pole liegt.

Das letzte Integral setzt uns in den Stand, mit wenigen Schlüssen den Zusammenhang festzustellen, der zwischen dem Volumen der Fusspunktfläche und der Wellenfläche derselben Basis besteht. In der Tat, die radii vectores beider Oberflächen stehen im Verhältniss 1:2, die Oberflächenelemente, welche demselben Kegel mit der Oeffnung $d\Sigma$ entsprechen, verhalten sich wie die Quadrate der Radien. Legen wir der Kubatur beider Flächen die letzte Formel zu Grunde, so folgt, dass das Volumen der Wellenfläche achtmal so gross ist als das Volumen der Fusspunktfläche derselben Basis.

Zum Schlusse dieser allgemeineren Betrachtungen möge hervorgehoben werden, dass der Hauptnachdruck in den folgenden Unter-

suchungen darauf gelegt ist, die ungemeine Einfachheit und Uebersichtlichkeit der von Gauss und Kummer entwickelten Methoden klarzulegen; aus diesem Grunde sind sie zum Teil auf die Rotationsflächen beschränkt worden. Fällt diese Beschränkung fort, so tritt eine Aenderung im Princip der Untersuchung nicht ein, wir gelangen bei der Auswertung der Integrale zu transcendenten Functionen, während im ersten Fall die Darstellung durch algebraische Functionen, durch den Logarithmus und die Arcus-Tangente möglich ist.

§ 3.

Das Ellipsoid.

Die Gleichung des dreiaxigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird identisch erfüllt durch die Functionen[15])

$$1) \qquad \begin{aligned} x &= a.\cos u, \\ y &= b.\sin u.\cos v, \\ z &= c.\sin u.\sin v. \end{aligned}$$

Die Elimination von v aus den beiden letzten Gleichungen führt zu dem Resultat

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \sin^2 u,$$

$$x = a.\cos u.$$

Beide Gleichungen repräsentiren eine zur X-Axe senkrechte Ellipse, so bald dem Parameter u ein fester Wert beigelegt wird.

Eliminiren wir u so folgt

$$bz = c.y.\operatorname{cotg} v,$$

wir erhalten die Gleichung einer sich bei veränderlichen Werten von v um die X-Axe drehenden Ebene, so dass also die Oberflächenpunkte des dreiaxigen Ellipsoides vermöge der Curven U und V dargestellt sind als Schnittpunkte einer veränderlichen, der X-Ebene parallelen, Ellipse und einer um die X-Axe sich drehenden Ebene. Sollen alle Punkte der Oberfläche erschöpft werden, so müssen die Veränderlichen u und v zwischen den Grenzen variiren

---

15) cf. Joachimsthal, Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechg. auf die Theorie der Flächen und der Linien dopp. Krümmung.

2)
$$0 \leqq v \leqq 2\pi,$$
$$0 \leqq u \leqq \pi.$$

Ich verlege den Coordinatenanfang in den Pol, dessen Coordinaten $-l, -m, -n$ sein mögen, und erhalte für die Coordinaten der Oberflächenpunkte des Ellipsoides

3) $x = l + a\cos u, \quad y = m + b\,.\sin u\cos v, \quad z = n + c\sin u\sin v.$

Aus diesen Gleichungen finden wir durch partielle Differentiation und mit Berücksichtigung von § 1, 10

4)
$$A = b\,.\,c\,.\sin u\cos u, \quad B = ac\sin^2 u\cos v, \quad C = ab\sin^2 u\sin v,$$
$$S^2 = N\sin^2 u,$$

wo

5) $$N = a^2b^2.\sin^2 u\sin^2 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2c^2\cos^2 u$$

gesetzt wurde. Vermöge der Gleichung 12. des § 1. setzen sich aus 3) und 4) die Gleichungen der Wellenfläche wie folgt zusammen:

6)
$$x_1 = \frac{2\,.b\,.c\,.\cos u\,.M}{N},$$
$$y_1 = \frac{2ac\sin u\cos v\,M}{N},$$
$$z_1 = \frac{2ab\sin u\sin v\,M}{N},$$

dabei ist

7) $$M = l\,.bc\cos u + m\,.ac\sin u\cos v + nab\sin u\sin v + abc,$$

die Grenzen sind 0 und π für u, 0 und 2π für v.

Die Wellenfläche ist, wie aus 6) hervorgeht, rings geschlossen, ihr Volumen demnach repräsentirt durch

$$V = -\tfrac{1}{3}\int r\,.\,ds\,.\cos(N,r).$$

Bedeuten A_1, B_1, C_1 die analogen Determinanten wie A, B, C nämlich

8)
$$A_1 = \frac{\partial y_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial y_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial u},$$
$$B_1 = \frac{\partial z_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u},$$
$$C_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial u},$$

so ist

$$ds = du\,.\,dv\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2},$$

$$\cos(N,r) = -\frac{A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1}{r\,.\,\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

daher

9) $$V = \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1)\,du\,dv.$$

Durch partielle Differentiation erhalten wir aus 6)

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{2bc}{N^2}\left\{N\left(-M\sin u + \cos u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - \cos u\,M\frac{\partial N}{\partial u}\right\},$$

10) $$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{2ac\cos v}{N^2}\left\{N\left(M\cos u + \sin u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - \sin u\,M\frac{\partial N}{\partial u}\right\},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{2ab\sin v}{N^2}\left\{N\left(M\cos u + \sin u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - \sin u\,M\frac{\partial N}{\partial u}\right\},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{2\,.\,bc\,.\cos u}{N^2}\left\{N.\frac{\partial M}{\partial v} - M\frac{\partial N}{\partial v}\right\},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{2\,ac\sin u}{N^2}\left\{N\left(-M\sin v + \cos v\ \frac{\partial M}{\partial v}\right) - \cos v\,.\,M\frac{\partial N}{\partial v}\right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2\,ab\,.\sin u}{N^2}\left\{N\left(M\cos v + \sin v\frac{\partial M}{\partial v}\right) - \sin v\,M\frac{\partial N}{\partial v}\right\},$$

Diese Grössen gestatten die Berechnung der Determinanten

$$A_1 = M.\frac{4\,.\,a^2b\,.\,c\,.\sin u}{N^3}\left\{\cos u\,.\,M.\,N + \sin u\,.\,N\frac{\partial M}{\partial u} - \sin u\,.\,M.\,\frac{\partial N}{\partial u}\right\},$$

$$B_1 = M.\frac{4\,ab^2\,c\,.}{N^3}\left\{\begin{aligned}&\sin^2 u\,.\cos v M.\,N + \sin v\,N\frac{\partial M}{\partial v} - \sin u\cos u\cos v N\frac{\partial M}{du}\\ &+\sin u\,.\cos u\,.\cos v\,.\,M\frac{\partial N}{\partial u} - \sin v.\,M\frac{\partial N}{\partial v}\end{aligned}\right\}$$

$$C_1 = M.\frac{4\,abc^2}{N^3}\left\{\begin{aligned}&\sin^2 u\,.\sin v\,.\,MN - \cos v.\,N\frac{\partial M}{\partial v} - \sin u\,.\cos u\,.\sin v N\frac{\partial M}{\partial u}\\ &+\sin u\,.\cos u\,.\sin v\,.\,M\frac{\partial N}{\partial u} + \cos v\,.\,M\,\frac{\partial N}{\partial v}\end{aligned}\right\}$$

Die einfachsten Operationen ergeben

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 = \frac{8\,.\,a^2.\,b^2.\,c^2.\,M^3\,\sin u}{N^3},$$

so dass für das Volumen der Wellenfläche die Relation besteht

11) $$V = \frac{8}{3} a^2 b^2 c^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{M^3 . \sin u}{N^3} \, du \, dv.$$

Die Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem von Hrn. Magener[16]) aufgestellten Doppelintegrale ergiebt sich sofort, wenn beachtet wird, dass $-l$, $-m$, $-n$ die Coordinaten des Poles bezogen auf das mit seinem Nullpunkt im Centrum des Ellipsoides gelegene rechtwinklige System bedeuten, während Magener sie durch α, β, γ bezeichnet. Der Vergleich lehrt auch, dass das Volumen V der Wellenfläche dem achtfachen Volumen der Fusspunktfläche des Ellipsoides gleich ist.

Entwickelt man den Ausdruck (cf. 7))

$$M^3 = \{ abc + l . bc \cos u + mac \sin u \cos v + nab \sin u \sin v \}^3$$

so wird die rechte Seite der Gleichung 11) gleich einer Summe von zwanzig Integralen, deren Argumente u und v zwischen den resp. Grenzen 0 und 2π, 0 und π variiren. Sämtlichen Integralen ist der Nenner N^3 gemeinsam, in welchem die trigonometrischen Functionen nur quadratisch auftreten. Zerfälle ich nun das Integrationsgebiet 0 bis 2π in die vier Intervalle 0 bis $\pi/2$, $\frac{\pi}{2}$ bis π, π bis $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π, so folgt, dass das $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2m+1} v \cos^n v \, dv}{N^3}$ als auch das $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^{2m+1} v \sin^n v \, dv}{N^3}$ verschwindet. In der Tat, ich kann vom Nenner absehen, die Elemente $\sin^{2m+1} v . \cos^n v$ des ersten Quadranten werden von denen des vierten, die des zweiten von denen des dritten aufgehoben, da sie ihnen stets gleich und entgegengesetzt sind. Genau so werden die Elemente $\cos^{2m+1} v \sin^n v$ des ersten und vierten Quadranten von denen des zweiten und dritten aufgehoben. Auf analoge Weise ergiebt sich noch, dass

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^{2m+1} u . \sin^n u \, du}{N^3} = 0$$

ist. Wird dann aber die Integration in passender Weise zuerst nach u und dann nach v oder umgekehrt ausgeführt, so folgt, dass alle zwanzig Doppelintegrale bis auf vier verschwinden, deren Gestalt die folgende ist:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du \, dv}{N^3}, \qquad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 u \sin u \, du \, dv}{N^3},$$

16) Magener, Kubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides. Archiv 34. pag. 452.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 u \cos^2 v \, du \, dv}{N^3}, \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 u \sin^2 v \, du \, dv}{N^3},$$

so bald in ihnen die Grenzen für beide Veränderlichen gleich 0 und $\frac{\pi}{2}$ gesetzt werden, tritt der Factor 8 vor das Summenzeichen.

Schreibe ich ferner das Volumen der Wellenfläche

12) $$V_{l,m,n} = V_0 + l^2 V_l + m^2 V_m + n^2 V_n,$$

und

$$Q = \frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u \cos^2 v}{b^2} + \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{c^2}$$

so haben die Grössen V_0, V_l, V_m, V_n folgende Werte

13)

$$V_0 = \frac{64}{3abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du \, dv}{Q^3},$$

$$V_l = \frac{64}{a^3 bc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u \sin u \, du \, dv}{Q^3},$$

$$V_m = \frac{64}{ab^3 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 u \cdot \cos^2 v \, du \, dv}{Q^3}$$

$$V_n = \frac{64}{abc^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 u \sin^2 v \, du \, dv}{Q^3}.$$

Diese vier Integrale lassen sich vermittelst einer einzigen Integration darstellen[17]). Wird nämlich der Quotient $\frac{1}{Q^2}$ partiell nach a, b, c differentiirt, so folgt

---

17) cf. Magener a. a. O. pag. 454.

$$\frac{\cos^2 u}{Q^3} = \frac{a^3}{4} \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{Q^2}\right)}{\partial a}, \qquad \frac{\cos^2 v \,.\, \sin^2 u}{Q^3} = \frac{b^3}{4} \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{Q^2}\right)}{\partial b},$$

14)

$$\frac{\sin^2 v \sin^2 u}{Q^3} = \frac{c^3}{4} \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{Q^2}\right)}{\partial c}$$

multipliciren wir beide Seiten dieser drei Gleichungen mit $\sin u \,.\, du \,.\, dv$ und integriren wir nach u und nach v zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir gerade die vier zuletzt angeführten Doppelintegrale, deren Auswertung daher auf die Bestimmung von

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du \, dv}{Q^2}$$

und dessen partiellen Differentialquotienten nach a, b, c zurückgeführt ist. Das bestimmte Doppelintegral C ist bekannt, es ist dasselbe, zu welchem Jacobi[18]) 1833 bei der Quadratur der reciproken Fläche des Basis-Ellipsoides gelangte. Ist

$$S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$$

diese Oberfläche, so resultirt

$$C = \frac{a^2 b^2 c^2 \,.\, S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)}{8}$$

und

15) $$V_l = \frac{16}{b \,.\, c} \cdot \frac{\partial C}{\partial}, \qquad V_m = \frac{16}{ac} \cdot \frac{\partial C}{\partial b}, \qquad V_n = \frac{16}{ab} \cdot \frac{\partial C}{\partial c},$$

zugleich nimmt V_0 mit Berücksichtigung der Relation

$$\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v = 1$$

die Gestalt an

16) $$V_0 = \frac{16}{3abc}\left(a^3 \frac{\partial C}{\partial a} + b^3 \frac{\partial C}{\partial b} + c^3 \frac{\partial C}{\partial c}\right),$$

wie sich durch Addition der Gleichungen 14) ergiebt. Die in Formel 13 aufgestellten Ausdrücke für V_l, V_m, V_n, V_0 sind stets positiv, da die Argumente der Integrale, also diese selbst, zwischen den vor-

---

18) Jacobi, De transformatione et determinatione integralium dupl. Crelle Bd. X.

gelegten Grenzen positive Grössen sind. Daraus geht zunächst hervor, dass das Volumen der Wellenfläche ein Minimum sein muss, wenn $l = m = n = 0$ ist, d. h. wenn der Mittelpunkt der Basis mit dem Pol zusammenfällt. Ferner, dass dies die einzige Lage des Poles ist, der ein Minimum oder Maximum des Volumens entspricht.

In der Tat bildet man die Gleichungen

$$\frac{\partial V_{l,m,n}}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial m} V_{l,m,n} = \frac{\partial}{\partial n} V_{l,m,n} = 0$$

so zeigt es sich, dass ihnen keine anderen Lösungen als die genannten $l = m = n = 0$ genügen.

Wir gelangen daher zu dem Lehrsatze:

I. Das Volumen der Wellenfläche des dreiaxigen Ellipsoides ist dann und nur dann ein Minimum, wenn der Pol im Mittelpunkt desselben gelegen ist.

Die Gleichung 12)

$$V_{l,m,n} = V_0 + l^2 V_l + m^2 V_m + n^2 V_n$$

führt uns noch zu einer Reihe interessanter Lehrsätze:

Wie schon einmal erwähnt, bedeuten l, m, n die Coordinaten des Mittelpunktes der Basis bezogen auf den Pol als Ursprung des Coordinatensystems, nun repräsentirt der Ausdruck

$$l^2 . V_l + m^2 V_m + n^2 V_n = D,$$

gleich einer Constanten, ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Pol ist. Wir erhalten den Satz:

II. Bewegt sich ein Ellipsoid derartig, dass ein Mittelpunkt auf einem zweiten Ellipsoide

$$l^2 \frac{V_l}{D} + m^2 \frac{V_m}{D} + n^2 \frac{V_n}{D} = 1,$$

dessen Centrum der Pol ist, gleitet, während seine Axen denen des letzteren parallel bleiben, so ist für alle Lagen das Volumen der auf das erstere bezogenen Wellenfläche ein constantes.

Da nun l^2, m^2, n^2 auch angesehen werden können als die Quadrate der Coordinaten $(-l, -m, -n)$ des Poles bezogen auf das Centrum der Basis, so folgt das bekannte Resultat:

III. Liegen die Pole auf der Oberfläche eines dreiaxigen, dem Basis-Ellipsoide concentrischen Ellipsoides, welches durch die Gleichung

$$x^2 \frac{V_l}{D} + y^2 \frac{V_m}{D} + z^2 \frac{V_n}{D} = 1$$

dargestellt wird, so sind die Volumina der zugehörigen Wellenflächen einander gleich.

Sämtliche Ellipsoide, zu denen man durch Veränderung von D gelangen kann, sind einander ähnlich:

IV. Die geometrischen Oerter der Pole gleicher Wellenkörper sind einander ähnliche, concentrische Ellipsoide.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Ellipsoide dem Basis-Ellipsoide nicht ähnlich sein können, auch lässt sich nachweisen, dass sie stets drei von einander verschiedne Axen besitzen, so lange der Basis diese Eigenschaft zukommt [19]).

Setzt man $l = \pm ka$, $m = \pm kb$, $n = \pm kc$ und berücksichtigt, dass den Gleichungen 15) und 16) gemäss für das Volumen der Wellenfläche auch die Relation besteht

17) $$V_{l,m,n} = \frac{16}{3abc}\left\{a^3 \frac{\partial C}{\partial a} + b^3 \frac{\partial C}{\partial b} + c^3 \frac{\partial C}{\partial c}\right\} + \frac{16}{abc}\left\{l^2 a \frac{\partial C}{\partial a} + m^2 b \frac{\partial C}{\partial b} + n^2 c \frac{\partial C}{\partial c}\right\}$$

so folgt

18) $$V_{ka,kb,kc} = V_0 (3k^2 + 1)$$

Aus dieser Formel ergeben sich wieder zwei correspondirende Lehrsätze:

V. Es sei ein Parallelepipedon vorgelegt, dessen Ecken die Coordinaten $b = \pm ka$, $m \pm kb$, $n = \pm kc$ besitzen. Construirt man um dieselben als Centra die acht möglichen Ellipsoide, welche alle die nämlichen den Kanten des Parallelepipeds gleichgerichteten Axen a, b, c besitzen, so sind die Volumina der auf sie bezogenen Wellenflächen unter sich und dem $(3k^2+1)$-fachen Minimalvolumen gleich.

VI. Liegt der Pol in einer beliebigen Ecke $x = \pm ka$, $y - \pm kb$, $z = \pm kc$ des Parallelepipeds, dessen Diagonalen sich im Centrum der Basis schneiden, so ist das Volumen der Wellenfläche dem $(3k^2+1)$-fachen des Minimalwertes V_0 gleich.

Der Kürze wegen wollen wir für den Augenblick die zweite Lage des Coordinatensystemes festhalten, annehmen, dass der Coordinatenanfang mit dem Mittelpunkt des Ellipsoides zusammenfällt. Ist $k = 1$,

---

19) cf. Magener a. a. O.

so nennen wir [20]) das Parallelepiped ein concentrisches, seine Diagonalen werden durch die Gleichungen $x = ka$, $y = kb$, $z = kc$, in denen k ein veränderlicher Parameter ist, dargestellt, so zwar, dass die Entfernung eines Punktes auf der Diagonale vom Mittelpunkte geschrieben werden kann $r = k.\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Dann resultirt:

VII. Bewegt sich der Pol auf einer der Diagonalen des dem Ellipsoide concentrischen (umschriebenen [21])) Parallelepipedons, so ist der Zuwachs, den der Minimalwert des Wellenflächenvolumens erleidet, dem Quadrate seiner Entfernung vom Mittelpunkte proportional und gegeben durch

$$V_0\left(1+3\frac{r^2}{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Die vier Diagonalen durchsetzen die Schar der Ellipsoide, deren Oberfläche der geometrische Ort der Pole gleicher Wellenkörper ist. Jene Ellipsoide aber erfüllen den ganzen Raum, daher ergiebt sich:

VIII. Das Volumen einer jeden Wellenfläche des dreiaxigen Ellipsoides lässt sich in die Form bringen

$$V_0(1+3k^2).$$

Das Doppelintegral C ist nach Jacobi eine symmetrische Function vierten Grades der Grössen a, b, c und genügt daher der Gleichung:

$$4C = a\frac{\partial C}{\partial a}+b\frac{\partial C}{\partial b}+c\frac{\partial C}{\partial c}.$$

Diese Relation gestattet den für das Volumen gefundenen Ausdruck 17) in eine äusserst einfache Form überzuführen, wenn $l = m = n$ gesetzt wird. Es ergiebt sich aus

$$V_{l,l,l} = V_0+\frac{64l^2}{abc}C = V_0+8l^2abcS\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$$

der Lehrsatz:

IX. Die Volumina der Wellenflächen des Ellipsoides, die den acht Ecken $x = y = z = \pm l$ eines concentrischen Würfels entsprechen, sind einander und dem Minimumkörper V_0 plus dem Körper gleich, der entsteht, wenn man die Oberfläche des reciproken Ellipsoides mit dem Factor $8l^2abc$ multiplicirt.

---

20) cf. Magener, l. l. pag. 461.

21) cf. Hirst, pag. 23.

Auch können die Gleichungen $x = y = z = l$ angesehen werden als das analytische Aequivalent der Diagonalen des concentrischen Würfels; da nun die Entfernung eines Punktes der Diagonalen vom Centrum des Ellipsoides $= l\sqrt{3}$ ist, so folgt:

X. Bewegt sich der Pol auf den Diagonalen des concentrischen Würfels, so ist der Zuwachs, den das Minimalvolumen der Wellenfläche erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Poles vom Centrum des Ellipsoides.

Hiermit müssen wir der grösseren Kürze wegen die Discussion der für das Volumen der Wellenflächen des Ellipsoides aufgestellten Gleichungen abbrechen. Die für die Fusspunktenkörper [22]) der beiden Rotationsellipsoide und der Kugel aufgestellten Lehrsätze lassen sich mit leichter Mühe übertragen und vermöge der mehrfach hervorgehobenen Dualität zwischen Pol und Wellenfläche vermehren.

§ 4.

Das zweischalige Hyperboloid.

Die Gleichung des zweischaligen Hyperboloides

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

wird identisch erfüllt durch die Functionen [23])

$$x = a\,\mathrm{tg}\,u\cos v,$$
$$y = b\,\mathrm{tg}\,u\sin v,$$
$$z = \frac{c}{\cos u},$$

welchen gemäss die Punkte auf der Mantelfläche des Hyperboloides dargestellt werden als Schnittpunkte einer der Z-Ebene parallelen, beweglichen und veränderlichen Ellipse und einer um die Z-Axe sich drehenden Ebene. Sollen sämtliche Punkte der Mantelfläche erschöpft werden, so sind

für v die Grenzen 0 und 2π
„ u „ „ 0 „ π

22) cf. Magener und Hirst a. a. O.

23) K. Bremer, „Beitrag zur Theorie des Potentials“. Diss. Rostock 1882. pag. 49.

festzuhalten. Legen wir ferner als Basis die *Rotationsfläche* derselben Art zu Grunde, und nehmen wir den Coordinatenanfang als im Pole $(-l, -m, -n)$ liegend an, so lauten die Coordinaten:

$$1) \quad x = l + a\,\mathrm{tg}\,u\cos v, \quad y = m + a\,\mathrm{tg}\,u\sin v, \quad z = n + \frac{c}{\cos u}.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir mit Hülfe der partiellen Differentiation die Werte der folgenden Grössen ab:

$$A = -ac\frac{\sin^2 u\cos v}{\cos^3 u}, \quad B = -ac\frac{\sin^2 u\sin v}{\cos^3 u}, \quad C = a^2\frac{\sin u}{\cos^3 u},$$

$$S^2 = a^2(a^2 + c^2\sin^2 u)\frac{\sin^2 u}{\cos^6 u}.$$

Sei

$$2) \qquad M = cl\sin u\cos v + cm\sin u\sin v - na - ac\cos u,$$

so sind vermöge der Untersuchungen des § 1. die Coordinaten der Wellenfläche gegeben durch

$$x_1 = 2cM\frac{\sin u\cos v}{a^2 + c^2\sin^2 u},$$

$$y_1 = 2cM\frac{\sin u\sin v}{a^2 + c^2\sin^2 u},$$

$$z_1 = -2aM\frac{1}{a^2 + c^2\sin^2 u}$$

Durch Division erhalten wir $y_1 = x_1\,\mathrm{tg}\,v$, die Curven [24]) V werden daher auf der Wellenfläche durch eine um die Z-Axe sich drehende Ebene ausgeschnitten. Quadriren wir die aus 3) abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{y_1}{z_1} = -\frac{c}{a}\sin u\sin v, \qquad \frac{x_1}{z_1} = -\frac{c}{a}\sin u\cos v$$

und addiren sie, so ergibt sich die Gleichung eines veränderlichen Kreiskegels

$$\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\sin^2 u$$

der den leuchtenden Punkt als Spitze besitzend auf der Wellenfläche die Curven U bestimmt.

Da die Coordinaten x; y, z und x_1, y_1, z_1 eindeutige Functionen von u und v sind, so werden die letzteren alle Punkte auf der Wellenfläche durchlaufen, wenn

für v die Grenzen 0 und 2π

„ u „ „ 0 „ π

24) cf. Joachimsthal „Anwendg. der Diff.- u. Int.-Rechng. auf die Theorie der Flächen und Curven dopp. Kr.“.

eingeführt werden. Dann aber geht aus der Gestalt der Functionen x_1, y_1, z_1 hervor, dass die Wellenfläche eine rings geschlossene ist.

Ihr Volumen wird dargestellt durch

$$V = \int z\, ds_1 \cos(N, z_1),$$

wo die Integration auszudehnen ist über die ganze Oberfläche; daher wird

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C_1 . z_1 \, du\, dv.$$

Nachdem die partiellen Differentialquotienten von x_1 und y_1 nach u und v bestimmt sind, gelangen wir durch wenige Transformationen zu

$$4) \quad C_1 = \frac{4c^2 M \sin u}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^2} \left\{ \cos u M + \sin u \frac{\partial M}{\partial u} \right\} - \frac{8c^4 M \sin^3 u \cos u}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^3}$$

und erhalten für das Volumen V die Differenz der beiden Integrale

$$5) \quad V = 16ac^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{M^3 \sin^3 u \cos u \, du\, dv}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^4}$$

$$- 8ac^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{M^2 \left(\cos u M + \sin u \frac{\partial M}{\partial u} \right) \sin u \, du\, dv}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^3}$$

Wir integriren zunächst das erste Doppelintegral nach v, wobei die Gleichungen

$$6) \qquad \int_0^{2\pi} \sin^m v \cos^{2n+1} v \, dv = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} v \cos^m v \, dv = 0$$

zur wesentlichen Vereinfachung dienen. Vom Factor $\frac{\sin^3 u \cos u}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^4}$ kann ich für den Augenblick absehen, entwickele ich dann M^3 und integrire gliedweise, so bleiben die Ausdrücke

$$-3 \int_0^{2\pi} c^2 l^2 \sin^2 u \cos^2 v \, (na + ac \cos u)\, dv$$

$$-3 \int_0^{2\pi} c^2 m^2 \sin^2 u \sin^2 v \, (na + ac \cos u)\, dv$$

$$- \int_0^{2\pi} (na + ac \cos u)^3 \, dv,$$

alle übrigen verschwinden. Mit anderen Worten, das erste Doppelintegral nimmt die Form an

$$7) \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{M^3 \sin^3 u \cos u \, du \, dv}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^4}$$

$$= -3\pi c^2 (l^2 + m^2) \int_0^{\pi} \frac{(na + ac\cos u) \sin^5 u \cos u \, du}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^4}$$

$$- 2\pi \int_0^{\pi} \frac{(na + ac\cos u)^3 \sin^3 u \cos u \, du}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^4}$$

Zwecks Answertung des zweiten Doppelintegrales in 5) ist zu bilden

$$M\cos u + \frac{\partial M}{\partial u}\sin u = 2cl \sin u \cos u \cos v + 2cm \sin u \cos u \sin v$$
$$- na\cos u - ac(\cos^2 u - \sin^2 u),$$

und dieser Ausdruck ist mit $M^2 \frac{\sin u}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^3}$ zu multipliciren.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 6) erhält man für dasselbe die Summe zweier einfacher Integrale

$$8) \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{M^2\left(M\cos u + \frac{\partial M}{\partial u}\sin u\right)\sin u \, du \, dv}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^3}$$

$$-2\pi \int_0^{\pi} \frac{(n^2a^2 + 2na^2 c\cos u + a^2c^2\cos^2 u)(na\cos u + ac\cos^2 u - ac\sin^2 u)\sin u \, du}{(a^2 + c^2\sin^2 u)^3}$$

$$-\pi c^2 (l^2 + m^2) \int_0^{\pi} \frac{(5na\cos u + 5ac\cos^2 u - ac\sin^2 u)\sin^3 u \, du}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^3}.$$

Vermittelst der Gleichung

$$9) \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^m u \cos^{2n+1} u \, du}{(a^2 + c^2 \sin^2 u)^r} = 0$$

lassen sich die Integrale 7) und 8) noch weiter reduciren.

Wir erhalten

$$10)\quad \int_0^{2\pi}\frac{M^3\sin^3u\cos u\,du\,dv}{(a^2+c^2\sin^2u)^4} = -3\pi ac^3(l^2+m^2)\int_0^{\pi}\frac{\sin^5u\cos^2u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\frac{(3n^2a^3c\cos u+a^3c^3u)\sin^3u\cos u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}$$

$$11)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{M^2\left(M\cos u+\frac{\partial M}{\partial u}\sin u\right)\sin u\,du\,dv}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}$$

$$-\pi c^2(l^2+m^2)\int_0^{\pi}\frac{5ac\cos^2u-ac\sin^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin^3u\,du$$

$$-2\pi\int_0^{\pi}\frac{3n^2a^3c\cos^2u-n^2a^3c\sin^2u+a^3c^3\cos^4u-a^3c^3\sin^2u\cos^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin u\,du.$$

Die Summe dieser beiden Grössen ergibt das Volumen, nachdem zuvor gemäss 5) die erstere mit $16ac^4$, die zweite mit $-8ac^2$ multiplicirt ist.

Ich will die rechte Seite der auf diese Weise entstehenden Gleichung in die Form bringen

$$12)\quad V = 8\pi a^2c^5(l^2+m^2)I_1+16\pi a^4c^3n^2I_2+16\pi a^4c^5I_3,$$

dann sind die Symbole gegeben durch

$$I_1 = \int_0^{\pi}\frac{5\cos^2u-\sin^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin^3u\,du - 6c^2\int_0^{\pi}\frac{\sin^5u\cos^2u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4},$$

$$13)\quad I_2 = \int_0^{\pi}\frac{3\cos^2u-\sin^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin u\,du - 6c^2\int_0^{\pi}\frac{\cos^2u\sin^3u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4},$$

$$I_3 = \int_0^{\pi}\frac{\cos^4u-\sin^2u\cos^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin u\,du - 2c^2\int_0^{\pi}\frac{\cos^4u\sin^3u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}.$$

Wird an Stelle der Differenz je zweier Integrale das Integral aus der Differenz der Argumente eingeführt, diese vereinfacht, und dann erst gliedweise integrirt, so resultirt

$$I_3 = 2a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin u \cos^4 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4} - \int_0^{\pi} \frac{\sin u \cos^2 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

und

14) $$V_0 = 16\pi a^4 c^5 I_3 = \frac{8}{3}\pi c^3 - 4\pi a^2 c + \frac{4\pi a^4}{\sqrt{a^2+c^2}} \log \text{nat} \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$ [25]

Durch ein ähnliches Verfahren wird gefunden

$$I_2 = 3 \int_0^{\pi} \frac{a^2 - c^2 \sin^2 u}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4} \sin u \cos^2 u \, du - \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

daher wird

15)
$$V_n = 16\pi a^4 c^3 I_2 = 4\pi c \frac{a+2c_2}{a^2+c^2} - \frac{4a^4\pi}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}} \log \text{nat} \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$

Ferner ist

$$I_1 = 6a^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 u \sin^3 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4} - \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

16) $$V_{lm} = 8\pi a^2 c^5 I_1 = 2\pi c \frac{3a^2+2c^2}{a^2+c^2}$$
$$- 2\pi a^2 \frac{3a^2+4c^2}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}} \log \text{nat} \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$

Das verlangte Volumen stellt sich demnach in der Gestalt dar

$$V_{l,m,n} = V_{l,m}(l^2+m^2) + V_n n^2 + V_o,$$

dabei bedeuten $V_{l,m}$, V_n, V_o bekannte Functionen der Axen des Hyperboloides, die positiv sind, wie sich mit wenigen Schlüssen aus den Integralen I_1, I_2, I_3 ableiten lässt.

Die Untersuchung derjenigen Lagen des Poles, denen ein Maximum oder Minimum des Wellenflächen-Volumens entspricht, führt zu der einzigen Lösung $l = m = n = o$ der Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Setzt man diese Wurzeln in die Gleichung 17) ein, so zeigt es sich, dass V_o das Minimum des Volumens darstellt. Diese Grösse ist das Achtfache desjenigen Ausdruckes, welchen Tortolini im 31. Bande

---

25) cf. Tortolini a. a. O. pag. 37.

des Crelle'schen Journals als Inhalt der dem zweischaligen Rotationshyperboloide entsprechenden Fusspunktfläche aufstellt; unter der Voraussetzung, dass der Pol mit dem Mittelpunkt zusammenfällt.

Lehrsatz I. Liegt der Pol im Mittelpunkt des Hyperboloides, so ist das Volumen der entsprechenden Wellenfläche ein Minimum.

Die Gleichung

18) $$V_{lm}(x^2+y^2)+V_n z^2 = D$$

repräsentirt ein Rotationsellipsoid, das mit der Basis concentrisch oder auch ein solches, dessen Mittelpunkt der Pol ist. Dies ist sogar die ursprüngliche Bedeutung der Gleichung 18), da der Coordinatenanfang im Pol gelegen ist. Nun treten aber die Grössen l, m, n nur quadratisch auf, ich kann sie ansehen als die Quadrate von $-l$, $-m$, $-n$, d. h. als Quadrate der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, des Poles, bezogen auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Ellipsoides ist.

Die Gleichungen 17) und 18) führen dann zu den beiden correspondirenden Lehrsätzen:

II. Bewegt sich das Hyperboloid mit seinem Mittelpunkt auf der Oberfläche des um den Pol als Mittelpunkt construirten Rotationsellipsoides

$$\frac{V_{lm}}{D}(x^2+y^2)+\frac{V_n}{D}z^2 = u$$

während die Hauptaxen beider stets gleichgerichtet sind, so bleibt das Volumen der entsprechenden Wellenfläche ein constantes.

III. Liegen die Pole auf der Oberfläche eines mit der Basis concentrischen Rotationsellipsoides

$$\frac{V_{l,m}}{D}(x^2+y^2)+\frac{V_n}{D}z^2 = 1$$

so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen einander gleich.

Durch Veränderung von D gelangen wir zu immer neuen Ellipsoiden, die einander ähnlich und mit dem Hyperboloide concentrisch sind. Wir finden demnach:

IV. Die geometrischen Oerter der Pole gleichen Volumens der Wellenfläche des Rotationshyperboloides sind einander ähnliche und concentrische Rotationsellipsoide.

Wird $l^2+m^2 = c_1^2$, $n = \pm c_2$ gesetzt, so repräsentiren diese Gleichungen bei beliebig aber fest vorgelegten Werten c_1 und c_2 zwei Kreise, denen folgende Eigenschaft zukommt:

V. Bewegt sich das zweifache Rotations-Hyperboloid mit seinem Mittelpunkte auf einem der Kreise $l^2+m^2 = c_1^2$, $n = \pm c_2$, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen einander gleich, vorausgesetzt, dass die Rotationsaxe des Hyperboloides der Z-Axe parallel bleibt.

VI. Bewegt sich der Pol auf den Kreisen $x^2+y^2 = c_1^2$, $z = \pm c_2$, so sind die Volumina der zugehörigen Wellenflächen dieselben [26]).

Es sei angenommen, dass die Coordinaten des Poles der Gleichung des Cylinders $x^2+y^2 = \varrho^2$ Genüge leisten, dann lehrt die Formel 17), dass das Volumen der Wellenfläche ein relatives Minimum ist, wenn überdies die Bedingung $z = 0$ erfüllt ist. Aus 17) ergiebt sich zugleich der Satz:

VII. Bewegt sich der Pol auf der Cylinderoberfläche $x^2+y^2=\varrho^2$, so sind die Zunahmen, welche das Wellenflächenvolumen

$$V_{l,m}\,\varrho^2+V_0$$

erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Poles von der Z-Ebene.

Ein specieller Fall ist der folgende:

VIII. Bewegt sich der Pol in der Rotationsaxe des Hyperboloides, so erfährt das Minimalvolumen eine Zunahme, die dem Quadrate des Abstandes des Poles vom Centrum des Hyperboloides proportional ist.

Durch analoge Betrachtungen leiten wir die Resultate ab:

IX. Bewegt sich der Pol in der Ebene $z = \pm c$, so sind die Zunahmen, welche das Volumen

$$V_n\,c^2+V_0$$

erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Poles von der Z-Axe.

X. Bewegt sich der Pol in der XY-Ebene, so sind die Zuwachse, welche zu dem Minimalvolumen hinzukommen, proportional dem Quadrate seiner Entfernung vom Centrum des Hyperboloides.

---

26) Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass das Coordinatensystem einmal als im Pole, das andere Mal als im Centrum des Hyperboloides mit seinem Ursprung gelegen vorzustellen ist. Zur Unterscheidung sind die laufenden Coordinaten im ersten Fall l, m, n, im anderen Fall x, y, z genannt.

Die erwähnte Reciprocität ist ein Analogon derjenigen zwischen Pol und Polare.

Wird nun umgekehrt der Pol als fest, das Hyperboloid als beweglich angesehen, so ergiebt sich eine Reihe correspondirender Lehrsätze, die wir zu dem folgenden zusammenziehen wollen:

XI. Bleibt die Rotationsaxe des zweischaligen Hyperboloides sich stets parallel, während das Centrum auf dem Kreise $l^2+m^2=\varrho^2$, $n=\pm c$ sich bewegt, so sind die Volumina sämtlicher Wellenflächen, deren Pol der Coordinatenanfang ist, einander gleich. Bei constantem ϱ ist die Zunahme, welche das Volumen $V_{l,m}\varrho^2+V_0$ erleidet, proportional c^2, bei veränderlichem ϱ und festem c ist die Zunahme, welche das Volumen $V_n c^2+V_0$ erfährt, proportional ϱ^2.

Eine besonders einfache Gestalt nimmt der für das Volumen gefundene Ausdruck an, wenn $l=m=n=k$ einer Constanten gesetzt wird. Nämlich

$$V_k = V_0\left(1-4\frac{k^2}{a^2}\right)+\frac{k^2}{a^2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi(2c)^3$$

daraus folgt:

XII. Liegt der Pol in einer beliebigen Ecke $x=y=z=k$ des Würfels, dessen Diagonalen sich im Centrum des Hyperboloides schneiden, so ist das Volumen der Wellenfläche gleich dem $\left(1-4\frac{k^2}{a^2}\right)$-fachen seines Minimalwertes, vermehrt um das $\left(\frac{k^2}{a^2}\right)$-fache Volumen einer Kugel, deren Radius die Rotationsaxe ist.

Die Gleichungen $x=y=z=k$ repräsentiren die Diagonalen des definirten Würfels, diese durchdringen die den Raum erfüllenden Rotationsellipsoide 18), und wird dies berücksichtigt, so führen die Lehrsätze III. und XII. zu dem folgenden:

XIII. Das Volumen einer beliebigen Wellenfläche des Rotationshyperboloides mit zwei Mantelflächen kann in die Form

$$V=V_k=V_0\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)+\frac{k^2}{a^2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi(2c)^3$$

gebracht werden.

Setzen wir z. B. in 17)

$$l=m=0,\quad n=\sqrt{a^2+c^2},$$

so erhalten wir

$$V_f = V_0+(a^2+c^2)V_n = \tfrac{4}{3}\pi(2c^2)$$

d, h. wir gelangen zu dem bekannten Resultat:

XIV. Liegt der Pol in dem einen Brennpunkt des Rotationshyperboloides, so ist das Volumen der entsprechenden Wellenfläche dem Inhalte einer Kugel gleich, deren Radius die Rotationsaxe ist.

§ 5.

Das einfache Hyperboloid.

Nach Bremer, „Beitrag z. Th. d. Potentials“ lassen sich die rechtwinkligen Coordinaten des einfachen Hyperboloides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

in folgender Weise als Functionen zweier Veränderlichen u und v darstellen:

$$x = \frac{a}{c}u\cos v+a\sin v,$$

$$y = \frac{b}{c}u\sin v-b\cos v,$$

$$z = u.$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen v, so resultiren

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{u^2}{c^2},$$

$$z = u$$

die Gleichungen einer mit u zugleich veränderlichen Ellipse.

Die Elimination von u führt zur Gleichung

$$x = \frac{a}{c}z\cos v+a\sin v$$

einer der Y-Axe parallelen Ebene. Die Mantelfläche ist daher anzusehen als das Continuum der Schnittpunkte jener Ellipse mit der beweglichen Ebene. Damit alle Punkte des Hyperboloides durchlaufen werden, sind

für u die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$
für v „ „ $-\pi$ „ $+\pi$

zu wählen [27]).

Ich verlege das Coordinatensystem parallel nach dem leuchtenden Punkte [28]), dann lauten die Coordinaten des einfachen Hyperboloides

27) cf. Bremer a. a. O. pag. 11.

28) cf. § 1.

$$x = l + \frac{a}{c} u \cos v + a \sin v,$$

1) $$y = m + \frac{b}{c} u \sin v - b \cos v,$$

$$z = n + u.$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$dx = \frac{a}{c} \cos v \, du + \left(-\frac{a}{c} u \sin v + a \cos v \right) dv$$

$$dy = \frac{b}{c} \sin v \, du + \left(\frac{b}{c} u \cos v + b \sin v \right) dv$$

$$dz = du$$

Wird nun für die Folge die Rotationsfläche derselben Art zu Grunde gelegt, also $a = b$ gesetzt, so ergeben sich die Beziehungen

$$A = -\frac{a}{c} (u \cos v + c \sin v),$$

$$B = -\frac{a}{c} (u \sin v - c \cos v),$$

$$C = \frac{a^2}{c^2} u,$$

$$S^2 = \frac{a^2}{c^4} (c^4 + u^2 (a^2 + c^2)).$$

Es sei ferner

$$M = c(lu - mc) \cos v + c(mu + lc) \sin v + ac^2 - nau,$$
$$N = c^4 + u^2 (a^2 + c^2),$$

so nehmen die Coordinaten der Wellenfläche die Form an

$$x_1 = 2cM \frac{u \cos v + c \sin v}{N},$$

2) $$y_1 = 2cM \frac{u \sin v - c \cos v}{N},$$

$$z_1 = -2aM \frac{u}{N}$$

Werden in den Gleichungen für x_1 und z_1 die rechten Seiten der Null gleich gemacht, die linken nach Potenzen von u geordnet, und die so gebildeten Relationen mit u multiplicirt, so kann dies

System der vier Gleichungen, als deren Unbekannte die Grössen u^3, u^2, u, 1 angesehen werden können, nur bestehen, wenn die Gleichungsdeterminante verschwindet: wir gelangen zu der Gleichung einer Ellipse mit den laufenden Coordinaten x_1 und z_1, deren Constanten den Parameter v in sich enthalten. Mit anderen Worten die Projectionen der Curven V auf die Y-Ebene sind Ellipsen; sie gehen sämtlich durch den Coordinatenanfang und degeneriren in den Fällen $v = \pm\pi$, $v = 0$ in Parabeln.

Auf analogem Wege ergeben sich die Projectionen der Curven V auf X-Ebene als eine Schar von Ellipsen, die den Pol mit einander gemein haben und in den Fällen $v = \pm\frac{\pi}{2}$ in Parabeln ausarten.

Es ist nicht schwer die Gleichungen der Projectionen der Curven U auf die Z-Ebene zu bestimmen, sie enthalten den Parameter u und lauten:

$$\{(x^2+y^2)(a^2u^2+c^2(u^2+c^2)) - 4c^2(u^2+c^2)(lx+my)\}^2 = 4a^2c^2(u^2+c^2)(c^2-nu)^2(x^2+y^2).$$

Die Punkte auf der Wellenfläche sind demgemäss anzusehen als die Schnittpunkte zweier elliptischer Cylinder mit einer Cylinderfläche von der vierten Ordnung, deren Erzeugende sich in ihnen lotrecht durchsetzen.

Sollen sämtliche Punkte der Wellenfläche erschöpft werden, so sind für u die Grenzen $\pm\infty$, für v die Grenzen $\pm\pi$ einzuführen. Dann lehrt das Gleichungssystem 2), dass die Coordinaten x_1, y_1, z_1 wohl den Wert Null annehmen können, nicht aber unendlich grosse Werte.

Stellen wir die ähnlichen Betrachtungen an wie in § 3., so wird das Volumen repräsentirt durch

$$V_{l,m,n} = \tfrac{1}{3}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1)\,du\,dv$$

Zur Bestimmung der Grössen A_1, B_1, C_1 sind die partiellen Differentialquotienten nach u und v zu bilden, aus ihnen setzen sich jene Determinanten in bekannter Weise zusammen § 3., 9). Es resultirt

$$A_1 = \frac{4ac}{N^3}M\left\{\begin{array}{c}(u\cos v + c\sin v)\left(MN + uN\frac{\partial M}{\partial u} - uM\frac{\partial N}{\partial u}\right)\\ -c\cos v\,N\frac{\partial M}{\partial v}\end{array}\right\}$$

$$B_1 = \frac{4ac}{N^3} M \left\{ \begin{array}{c} (u\sin v - c\cos v)\left(MN + uN\frac{\partial M}{\partial u} - uM\frac{\partial N}{\partial u}\right) \\ -c\sin v N\frac{\partial M}{\partial v} \end{array} \right\}$$

$$C_1 = \frac{4c^2}{N^3} M \left\{ u\,MN - cN\frac{\partial M}{\partial v} + (u^2+c^2)\left(N\frac{\partial M}{\partial u} - M\frac{\partial N}{\partial u}\right) \right\}$$

Wenige Operationen führen dann zu

3) $$V_{l,m,n} = \tfrac{8}{3}ac^4 \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M^3}{N^3}\,du\,dv$$

Wird nun M^3 entwickelt und gliedweise integrirt, so folgt unter Beachtung der Formeln

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n+1}v \sin^m v\,dv = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n v \sin^{2m+1}v\,dv = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 v\,dv = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 v\,dv = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(c^4+(a^2+c^2)u^2)^3} = \frac{\pi}{8(a^2+c^2)c^6\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(c^4+(a^2+c^2)u^2)^3} = \frac{3\pi}{8c^{10}\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2\iota+1}du}{(c^4+(a^2+c^2)u^2)^3} = 0.$$

der nachstehende Wert für das Volumen der Wellenfläche

4) $$V_{l,m,n} = V_{l,m}(l^2+m^2) + V_n n^2 + V_0,$$

wo der Kürze wegen

5) $$V_{l,m} = \frac{\pi^2 a^2(4c^2+3a^2)}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}}, \quad V_n = \frac{2\pi^2 a^4}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$V_0 = \frac{2\pi^2 a^4}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

gesetzt wurde. Die letzten drei Grössen sind positiv, daher ergeben sich aus 4) die Sätze:

I. Das Volumen der Wellenfläche des einfachen Rotationshyperboloides ist dann und nur dann ein Minimum

$$V_0 = \frac{2\pi^2 a^4}{\sqrt{a^2+c^2}}$$ [29])

wenn der Pol im Centrum gelegen ist.

Ferner wenn D eine Constante bedeutet:

II. Bleibt die Rotationsaxe des Hyperboloides der Z-Axe parallel, während das Centrum sich auf einem beliebigen Rotationsellipsoide der Schar

$$(l^2+m^2)\frac{V_{l,m}}{D} + n^2\frac{V_n}{D} = 1$$

bewegt, so sind die Volumina der Wellenflächen, deren Pol der Coordinatenanfang ist, einander gleich.

III. Die geometrischen Oerter der Pole aller Wellenflächen gleichen Volumens sind eine Schar mit dem Basis-Hyperboloide concentrischer Rotationsellipsoide

$$(x^2+y^2)\frac{V_{l,m}}{D} + z^2\frac{V_n}{D} = 1,$$

die einander ähnlich sind.

IV. Bleibt die Rotationsaxe des einfachen Hyperboloides der Z-Axe parallel, während das Centrum auf einem der Kreise $l^2+m^2 = c_1^2$, $n = \pm c_2$ sich bewegt, so sind dio Volumina aller zugehörigen Wellenflächen, deren Pol der Coordinatenanfang ist, einander gleich.

Ist $c_2 = 0$, so wird das Volumen der Wellenfläche repräsentirt durch

$$V_{l,m}c_1 + V_0,$$

ist $c_1 = 0$, so ist das Volumen gleich

$$V_n c_2 + V_0$$

es folgen daraus die Sätze:

V. Bewegt sich das einfache Hyperboloid in der definirten Weise auf der Oberfläche des Cylinders $l^2+m^2 = \varrho^2$, so sind die Zunahmen,

---

29) cf. Tortolini a. a. O. pag. 39.

welche das Wellenflächenvolumen $V_{l,m}\varrho^2+V_0$ erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Mittelpunktes von der Z-Ebene.

VI. Bewegt sich das einfache Hyperboloid im angegebenen Sinne auf der Ebene $z = \text{const}$, so sind die Zuwachse, welche zu dem Volumen $V_n\,\text{const}+V_0$ hinzutreten, dem Quadrate des Abstandes des Mittelpunktes von der Z-Axe proportional.

VII. Denken wir das einfache Hyperboloid der Art verschoben, dass die Rotationsaxe sich parallel in der Z-Ebene bewegt, so sind die Zunahmen, welche zu dem Minimalvolumen V_0 hinzutreten, proportional dem Quadrate der Entfernung des Centrums von dem Coordinatenanfang.

VIII. Bewegt sich das einfache Hyperboloid in der Weise vom Pole fort, dass seine Rotationsaxe stets mit der Z-Axe zusammenfällt, so sind die Zuwachse, welche das Minimalvolumen V_0 erleidet, dem Quadrate der Entfernung des Centrums vom Pole proportional.

Wenn wir jetzt umgekehrt den Pol als beweglich, die Basis als fest ansehen, so ergeben sich ganz analoge Sätze wie in § 4. Wir wollen sie zusammenfassen und in den nachstehenden Lehrsatz kleiden:

IX. Bewegt sich der Pol auf einem der Kreise $x^2+y^2 = \varrho^2$, $z = \pm\,\text{const}$, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen des einfachen Rotationshyperboloides einander gleich. Aendert sich eine der Grössen ϱ und c, während die andere fest bleibt, so sind die Zunahmen, welche die Volumina $V_{l,m}\varrho^2+V_0$ und $V_n c^2+V_0$ erleiden, resp. proportional c^2 und ϱ^2.

Wird $x = y = z = kc$ gesetzt, so nimmt die Gleichung 4) die Form an

$$V_{kc} = \frac{\pi^2 a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}(8k^2c^2+2a^2) = V_0+8k^2.\,\pi^2\frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Nun stellt der Ausdruck[30]) $\dfrac{\pi^2 a^4}{4\sqrt{a^2+c^2}}$ das Volumen des Körpers dar, der durch Rotation der Lemniskate $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2-c^2y^2$ um die Y-Axe entsteht, daher resultirt:

X. Liegt der Pol in einer beliebigen Ecke $x = y = z = kc$ des concentrischen Würfels, so sind die Volumina der acht entsprechenden Wellenflächen dem Minimalvolumen V_0 gleich vermehrt um

30) cf. Tortolini a. a. O. pag. 39.

das $\left(32k^2\frac{c^2}{a^2}\right)$-fache Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Lemniskate $(x^2+y^2) = a^2x^2 - c^2y^2$ um die Y-Axe erzeugt wird.

Die Gleichungen $x = y = z = kc$ können als das analytische Aequivalent der Diagonalen des definirten Würfels angesehen werden; liegt der Pol auf einer derselben, so ist seine Entfernung vom Mittelpunkt gegeben durch $r = kc\sqrt{3}$. Demnach finden wir:

XI. Bewegt sich der Pol auf den Geraden $x = y = z = kc$, so ist der Zuwachs, den das Minimalvolumen V_0 erleidet, dem Quadrate seiner Entfernung vom Centrum des Hyperboloides proportional.

Diese Geraden durchdringen die Schar der Ellipsoide

$$\frac{V_{l,m}}{D}(x^2+y^2)+\frac{V_n}{D}z^2 = 1,$$

dann aber geht aus den Sätzen III. und XI. der nachstehende hervor.

XII. Das Volumen einer jeden Wellenfläche des einfachen Rotationshyperboloides kann in die Form

$$V = V_0 + 8k^2\pi^2\frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

gebracht werden.

Ist z. B. $k = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich der einfache Ausdruck:

$$Vc/_2 = 2\pi^2a^2\sqrt{a^2+c^2}$$

Wir gelangen zu dem Satz:

XIII. Liegt der Pol in einer der Ecken des concentrischen Würfels, dessen Seitenflächen die Rotationsaxe des einfachen Hyperboloides halbiren, so ist das Volumen der entsprechenden Wellenfläche gleich dem Körper, der durch Multiplication von $\frac{\pi}{8}\sqrt{a^2+c^2}$ mit der Kugeloberfläche entsteht, deren Radius die Nebenaxe des Hyperboloides ist.

Die Substitution $x = y = z = ha$ führt zu dem Resultat:

$$V_{l,m,n} = (4h^2+1)V_0,$$

oder wir finden

XIV. Bewegt sich der Pol auf den Diagonalen des Würfels, dessen Seitenflächen die Endpunkte der Nebenachsen treffen, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen dem $(4h^2+1)$fachen

Minimalvolumen V_0 gleich, wo $h = \frac{r}{a\sqrt{3}}$ der Entfernung r des Poles vom Centrum des Hyperboloides proportional ist.

Mit Berücksichtigung von III. gelangen wir zu

XV. Das Volumen einer jeden Wellenfläche des einfachen Rotationshyperboloides kann auf die Form

$$V_{t,m,n} = V_0(4h^2+1)$$

gebracht worden.

Zwischen den Zahlen h und k der Lehrsätze XII. und XIV. besteht die Relation $ah = \pm kc$. Der Fall $h = 1$ führt zu dem Lehrsatze:

XVI. Liegt der Pol in den Ecken des concentrischen Würfels, dessen Seitenflächen die Endpunkte der Nebenaxen treffen, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen dem fünffachen Minimalvolumen V_0 gleich.

Auch die Lehrsätze X. bis XVI. lassen sich umkehren, insofern wir den Pol als fest, das Hyperboloid als beweglich ansehen können. Der Kürze wegen soll darauf nur hingewiesen werden.

§ 6.

Das Rotationsparaboloid.

Die Gleichung des Rotationshyperboloides

$$x^2+y^2+az = 0$$

wird identisch erfüllt durch die Functionen [31]):

$$r = au.\cos v,$$
$$y = au\sin v,$$
$$z = -au^2,$$

deren Variabele u und v in folgender Weise zu definiren sind: die Curven $U\{x^2+y^2 = a^2u^2.\ z = -au^2\}$ sind der XY-Ebene parallele, bewegliche und veränderliche Kreise; die Curven V werden durch eine um die Z-Axe sich drehende Ebene $y = x.\operatorname{tg} v$ auf dem Paraboloide ausgeschnitten.

Legen wir den folgenden Untersuchungen eine paraboloidische

---

31) cf. Bremer, a. a. O. pag. 47.

Calotte von der Höhe h zu Grunde, so sind die Grenzen, zwischen denen u und v variiren müssen, 0 und 2π für v, 0 und $\sqrt{\frac{h}{a}}$ für u.

Durch die Verlegung des Coordinatenanfanges in den leuchtenden Punkt $(-l, -m, -n)$ ergeben sich folgende Gleichungen:

1) $$x = l + au\cos v, \quad y = m + au\sin v, \quad z = n - au^2$$

Durch partielle Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -au\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = a\sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = au\cos v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -2au, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Hieraus leiten wir ab

2) $$\begin{cases} A = 2a^2u^2\cos v, & B = 2a^2u^2\sin v, \quad C = a^2u, \\ & S^2 = a^4u^2(4u^2+1). \end{cases}$$

Wenige Operationen ergeben die Coordinaten der Wellenfläche des Rotationsparaboloides in der Form

3) $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4u\cos v}{4u^2+1}M, \\ y_1 = \dfrac{4u\sin v}{4u^2+1}M, \\ z_1 = \dfrac{2}{4u^2+1}M. \end{cases}$$

dabei haben wir der Kürze wegen

4) $$M = 2lu\cos v + 2mu\sin v + n + au^2$$

gesetzt. Es ist bekannt, dass die vom Brennpunkt ausgehenden Lichtstrahlen an der Oberfläche des Rotationsparaboloides parallel der Rotationsaxe reflectirt werden. Durch Specialisirung der Formeln 3) und 4) gelangen wir unmittelbar zu demselben Resultat:

Sei $l = m = 0$, $n = a/4$, so folgen die Gleichungen der Wellenfläche

$$x_f = au\cos v, \quad y_f = au\sin v, \quad z_f = a/2,$$

die eine zur Z-Axe senkrechte Ebene repräsentiren, deren Schnitt-

punkt mit dieser Axe dieselbe Entfernung $\frac{a}{4}$ vom Scheitel des Paraboloides hat, wie der Focus. Zu der paraboloidischen Calotte gehört ein endliches Kreisstück

$$u = \sqrt{\frac{h}{a}}$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 u^2)_{u=0}$$

der Ebene

$$z = \frac{a}{2},$$

d. h. der Kreis

5) $$x^2 + y^2 = ah, \quad z = \frac{a}{2}.$$

Nach dieser Abschweifung, deren Resultat später von Bedeutung sein wird, kehren wir zu dem Gleichungssystem 3) zurück.

Die Coordinaten x, y, z wie x_1, y_1, z_1 sind eindeutige Functionen von u und v. Für die Veränderlichen u und v der Functionen x_1, y_1, z_1 sind daher die Grenzen 0 und $\sqrt{\frac{h}{a}}$ resp. 0 und 2π einzuführen, wenn alle Punkte der Wellenfläche erschöpft werden sollen, die der Oberfläche der paraboloidischen Calotte entsprechen.

Mit wachsenden Werten von h wird nun auch u grösser und grösser, mit u zugleich wachsen auch die Coordinaten der Wellenfläche, so dass x_1, y_1 für unendlich grosse Werte von h über alle Grenzen hinaus zunehmen. Die Oberfläche des Rotationsparaboloides ist daher nicht rings geschlossen. Wir müssen uns auf die paraboloidische Calotte von endlicher Höhe, auf ein endlich begrenztes Oberflächenstück der Wellenfläche beschränken, und haben unter dem Volumen der Wellenfläche den Inhalt des Kegels zu verstehen, dessen Basis dies Oberflächenstück, dessen Spitze der Pol ist. Es wird vom Zeichen abgesehen, dargestellt durch

$$V = \tfrac{1}{3} \int r \, ds \cos(N, r),$$

oder

$$V = -\tfrac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1) \, du \, dv$$

Es ist nicht schwer, die Gleichung des begrenzenden Kegelmantels aufzustellen. Aus 3) ergiebt sich:

$$x_1 = 2z_1 u\cos v, \quad y_1 = 2z_1 u\sin v$$

aus beiden

$$x_1^2 + y_1^2 = 4u^2 z_1^2,$$

die Gleichung eines Kegels, der die Wellenfläche in den Curven U durchsetzt, setzen wir in 6) an Stelle von u die obere Grenze $\sqrt{\frac{h}{a}}$, so repräsentirt die resultirende Formel

$$a(x_1^2 + y_1^2) = 4hz_1^2$$

den begrenzenden Kegelmantel.

Aus 3) leiten wir durch partielle Differentiation ab

$$\frac{\partial c_1}{\partial u} = \frac{4\cos v}{(4u^2+1)^2}\left((4u^2+1)\left(M + u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - 8Mu^2\right),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{4\sin v}{(4u^2+1)^2}\left((4u^2+1)\left(M + u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - 8Mu^2\right),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{2}{(4u^2+1)^2}\left((4u^2+1)\frac{\partial M}{\partial u} - 8Mu\right),$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{4u}{(4u^2+1)}\left(-M\sin v + \frac{\partial M}{\partial v}\cos v\right),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{4u}{(4u^2+1)}\left(M\cos v + \frac{\partial M}{\partial v}\sin v\right),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{2}{(4u^2+1)}\frac{\partial M}{\partial v}$$

und finden

$$A_1 = \frac{8M}{(4u^2+1)^2}\left(\sin v\frac{\partial M}{\partial v} - u\cos v\frac{\partial M}{\partial u}\right) + \frac{64M^2u^2\cos v}{(4u^2+1)^3},$$

7) $$B_1 = \frac{-8M}{(4u^2+1)^2}\left(\cos v\frac{\partial M}{\partial v} + u\sin v\frac{\partial M}{\partial u}\right) + \frac{64M^2u^2\sin v}{(4u^2+1)^3},$$

$$C_1 = \frac{16Mu}{(4u^2+1)^2}\left(M + u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - \frac{128M^2u^3}{(4u^2+1)^3}$$

Aus ihnen und den Gleichungen in 3) resultirt

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 = \frac{32M^3}{(4u^2+1)^3},$$

welcher Wert in Verbindung mit 4) zu der Formel führt

8)

$$V = \frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{(2lu\cos v + 2mu\sin v + n + au^2)^3 u\,du\,dv}{(4u^2+1)^3}$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{2\pi(n+au^2)^3 + 12\pi(l^2+m^2)(n+au^2)^2u^2}{(4u^2+1)^3}\,u\,du$$

Der Zähler des Quotienten unter dem Integralzeichen lautet nach Potenzen von u geordnet:

$$2\pi(a^3u^7 + 3a^2nu^5 + 6a(i^2+m^2)u^5 + 3an^2u^3 + 6n(l^2+m^2)u^3 + n^3u).$$

Setzen wir daher

$$\frac{3}{64\pi}V = a^3J_7 + 3(a^2n + 2a(l^2+m^2))J_5 + 3(an^2 + 2n(l^2+m^2))J_3 + n^3J_1,$$

so sind unter den Grössen J folgende Integrale zu verstehen:

$$J_7 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u^7\,du}{(4u^2+1)^3} = \frac{16h^3 + 18h^2a + 3ha^2}{128a(4h+a)^2} - \frac{3}{512}\log\text{nat}\,\frac{4h+a}{a},$$

$$J_5 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u^5\,du}{(4u^2+1)^3} = -\frac{h(6h+a)}{32(4h+a)^2} + \frac{1}{128}\log\text{nat}\,\frac{4h+a}{a},$$

$$J_3 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u^3\,du}{(4u^2+1)^3} = \frac{h^2}{4(4h+a)^2},$$

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u\,du}{(4u^2+1)^3} = \frac{h(2h+a)}{2(4h+a)^2}.$$

Die Coefficienten J sind hierdurch bestimmt, aus der Form der unter dem Integrationszeichen stehenden Ausdrücke und den positiven Integrationsgrenzen geht unmittelbar hervor, dass sie positive Zahlen

sind. In 8) bedeuten l, m, n die rechtwinkligen Coordinaten des Scheitels des Rotationsparaboloides, bezogen auf den Pol als Anfang, während $-l$, $-m$, $-n$ resp. x, y, z die Coordinaten des Poles sind bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Ursprung der Scheitel des Paraboloides ist.

Demgemäss kann das Volumen V auf folgende beiden Arten dargestellt werden[32]).

$$9)\quad V' = +\frac{64}{3}\pi J n^3 + 64\pi J_3(an^2 + 2n(l^2+m^2)) + 64\pi J_5(a^2 n + 2a(l^2+m^2)) + \frac{64}{3}\pi a^3 J_7.$$

$$10)\quad V = -\frac{64}{3}\pi J_1 J z^3 - 64\pi J_3(2(x^2+y^2)z - az^2) + 64\pi J_5(2a(x^2+y_2) - a^2 z) + \frac{64}{3}\pi a^3 J_7.$$

Aus der zweiten Formel ergiebt sich der Lehrsatz:

I. Der geometrische Ort der Pole, denen ein und dasselbe Volumen der dem Rotationsparaboloide zugehörigen Wellenfläche entspricht, ist eine Oberfläche dritter Ordnung $V = \text{const.}$

Die Gleichung

$$2(x^2+y^2) - az = 0$$

repräsentirt ein Rotationsparaboloid, das sich vom Coordinatenanfang nach der positiven Seite der Z-Axe hin erstreckt, während die Basis sich nach der entgegengesetzten Richtung hin ausdehnt; auch unterscheiden sich die Parameter der erzeugenden Parabeln um den Factor zwei. Berücksichtigt man, dass der Coefficient von z^3 in 10) negativ ist, so resultirt der eigentümliche Lehrsatz:

II. Bewegt sich der Pol auf dem Rotationsparaboloide

$$x^2+y^2-\frac{a}{2}z = 0,$$

so ändern sich erstens die Volumina der entsprechenden Wellenflächen der Basis

$$x^2+y^2+az = 0$$

---

32) Dass die Wahl des Vorzeichens die richtige ist, ergiebt der am Ende dieses § untersuchte Specialfall.

nur mit der Entfernung des Poles von der Z-Ebene; so zwar, dass zweitens die Abnahmen, welche das Volumen

$$V_0 = \frac{64}{3}\pi J_7 a^3$$

erleidet, proportional dem Kubus jener Entfernung sind. Dabei bedeutet V_0 das Volumen der Wellenfläche, deren Pol der gemeinsame Schnittpunkt beider Paraboloide ist.

Der erste Teil dieses Lehrsatzes kann vermöge der Formel

$$V = -\frac{64}{3}\pi J_1 z^3 - 64\pi J_3 (2z(x^2+y^2) - \varphi a z^2 + (\varphi - 1) a z^2)$$

$$+ 64\pi J_5 (2a(x^2+y^2) - \varphi a^2 z + (\varphi - 1) a^2 z) + \frac{64}{3}\pi J_7 a^3,$$

in der φ eine von Null verschiedene Zahl bedeuten möge, verallgemeinert werden:

III. Bewegt sich der Pol auf dem Kreisschnitte des Paraboloides

$$x^2 + y^2 - \varphi a z = 0$$

mit der Ebene

$$z = \text{Const},$$

so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen der Basis

$$x^2 + y^2 + az = 0$$

einander gleich.

Je nach der Wahl von $\varphi \gtrless 0$ sind die Paraboloide

$$x^2 + y^2 - \varphi a z = 0$$

auf der positiven oder negativen Seite der Z-Axe gelegen.

Alle diese Kreisschnitte können wir auch ansehen als Schnittlinien des Cylinders $x^2 + y^2 = c_1^2$, $z = c_2$. Dann folgt

IV. Bewegt sich der Pol auf dem Kreisschnitte des Cylinders $x^2 + y^2 = \varrho^2$ und der Ebene $z = \text{Const}$, so bleiben für alle möglichen Lagen des Poles die Volumina der Wellenflächen des Rotationsboloides dieselben.

Hierbei ist zu beachten, dass nicht wie bei den Wellenflächen des Ellipsoides und der Hyperboloide den beiden Kreisen

$$x^2 + y^2 = \varrho^2, \quad z = \pm c^2$$

dasselbe Volumen entspricht.

Die Coordinaten der Pole, denen ein Maximal- oder Minimalwert des Volumen V zugehört, müssen den Gleichungen genügen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 = -256\pi x(J_3 z - J_5 a) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 = -246\pi y(J_3 z - J_5 a) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 = -64\pi(J_1 z^2 + 2J_3(x^2+y^2) - 2J_3 az + a^2 J_5) = 0.$$

Die Lagen des Poles sind daher die 8 Schnittpunkte der drei Oberflächen zweiten Grades $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$, von welchen die beiden ersten in Ebenenpaare zerfallen, die dritte ein Ellipsoid darstellt. In der Tat, durch die Transformation $x = x$, $y = y$, $z = z + a\frac{J_3}{J_1}$ nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an

$$J_1 z^2 + 2J_3(x^2+y^2) = \frac{a^2}{J_1}(J_3^2 - J_1 J_5).$$

Diesem Rotationsellipsoide können nun reelle Punkte nur dann entsprechen, wenn $J_3^2 - J_1 J_5 > 0$ ist, da J_1 positiv ist.

Das Vorzeichen von

$$J_3^2 - J_1 J_5 = \frac{h^4}{16(4h+a)^4} - \frac{h(2h+a)}{2(4h+a)^2}\left\{-\frac{h(6h+a)}{32(4h+a)^2} + \frac{1}{128}\log\frac{4h+a}{a}\right\}$$
$$= \frac{h^2}{64(4h+a)^2} - \frac{h(2h+a)}{256(4h+a)^2}\log\frac{4h+a}{a},$$

hängt ab von dem Factor

$$4h - (2h+a)\log\frac{4h+a}{a}.$$

Nun ist

$$\log\frac{4h+a}{a} = \log\left(1+\frac{4h}{a}\right) = 2\left\{\frac{2h}{2h+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{2h+a}\right)^3 + \cdots\right\}$$ [33]

oder

$$4h - (2h+a)\log\frac{4h+a}{a} = -\frac{2}{3}\frac{(2h)^3}{(2h+a)^2} - \frac{2}{5}\frac{(2h)^5}{(2h+a)^4} - \cdots$$

jedenfalls eine negative Grösse.

33) cf. Harnack, Die Elemente der Diff.- und Int.-Rechng. § 47. in fine.

Das Ellipsoid $\frac{\partial V}{\partial z}$ ist daher imaginär, es können demnach überhaupt keine reellen Lagen des Poles existiren, denen ein Maximal- oder Minimalwert des Volumens der Wellenfläche eines Rotationsparaboloides zukommt.

Zum Vergleiche möge noch das von Herrn Fischer[34]) zur Bestimmung des Volumens der Fusspunktflächen angewandte Verfahren herangezogen werden. Er gelangt durch Einführung von Polarcoordinaten, und nachdem zuvor die Integration nach dem radius vector ausgeführt wurde, zu folgender Formel für das Volumen K einer beliebigen Basis $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

$$K = \tfrac{1}{3}\int_a^b\int_{a'}^{b'}\left\{(\xi-\alpha)\cos u\cos v+(\eta-\beta)\cos u\sin v+(\zeta-\gamma)\sin u\right\}^3\cos u\,du\,dv$$

hierin bedeuten α, β, γ die Coordinaten des Poles, nach unserer Bezeichnungsweise haben wir dafür $-l$, $-m$, $-n$ zu setzen.

Ferner wird verlangt, dass die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ der Basis vermöge der drei Gleichungen

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

$$-p = -\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \operatorname{cotg} u\cos v$$

$$-q = -\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = \operatorname{cotg} u\sin v\ ^{34})$$

als Functionen der Winkel u und v dargestellt werden.

Aus der Gleichung der Basis leiten wir durch particlle Integration

$$p = -\frac{2}{a}\xi, \quad q = -\frac{2}{a}\eta$$

ab, und finden

$$\xi = \frac{a}{2}\operatorname{cotg} u\cos v, \quad \eta = \frac{a}{2}\operatorname{cotg} u\sin v, \quad \zeta = -\frac{a}{4}\operatorname{cotg}^2 u.$$

Einer paraboloidischen Calotte von der Höhe h entsprechen die Grenzen

$$0 \text{ und } 2\pi \text{ für } v, \quad \frac{\pi}{2} \text{ und } \operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{\frac{h}{a}} \text{ für } u.$$

---

34) cf. Fischer, l. l. pag. 13. In der mir vorliegenden Dissertation steht allerdings $p = \operatorname{cotg} u\cos v$, $q = u\sin v$, doch ist der Druckfehler unschwer zu erkennen.

Es resultirt

$$K = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arc\,cotg}\,2\sqrt{\frac{h}{a}}}\left(l\cos u\cos v + m\cos u\sin v + n\sin u + \frac{a\cos^2 u}{4\sin u}\right)^3 \cos u\,du\,dv$$

wird zunächst die Integration nach v von 0 bis 2π ausgeführt, so erhalten wir

$$K = \tfrac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arc\,cotg}\,2\sqrt{\frac{h}{a}}}\left(2\pi\left(\frac{a\cos^2 u}{4\sin u} + n\sin u\right)^3 + 3\pi(l^2+m^2)\left(\frac{a\cos^2 u}{4\sin u} + n\sin u\right)\cos^2 u\right)\cos u\,du$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arc\,cotg}\,2\sqrt{\frac{h}{a}}}\left(2\left(\frac{a}{4}\cos^2 u + n\sin^2 u\right)^3 + 3(l^2+m^2)\left(\frac{a}{4}\cos^2 u + n\sin^2 u\right)\cos^2 u\sin^2 u\right)\frac{\cos u\,du}{\sin^3 u}$$

Führen wir in dasselbe durch die Gleichung $\operatorname{cotg} u = 2x$ eine neue Veränderliche x ein, so ist

$$\sin^2 u = \frac{1}{4x^2+1}, \quad \cos u^2 = \frac{4x^2}{4x^2+1}, \quad -\frac{du}{\sin^2 u} = 2dx,$$

und

$$K = -\frac{8\pi}{3}\int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}}\left((ax^2+n)^3 + 6(ax^2+n)x^2(l^2+m^2)\right)\frac{x\,dx}{(4x^2+1)^3}$$

Wir gelangen vom Zeichen abgesehen zu dem achten Teil des in 8) aufgestellten Integrales, dessen Auswertung zu der Formel 9) führt.

Auch diese Gleichung 9) soll uns zur Ableitung einer Reihe von Lehrsätzen dienen:

V. Bewegt sich die Basis derartig, dass ihr Scheitel auf der Oberfläche dritter Ordnung $V' = \text{Const}$ gleitet, während die Rotationsaxe sich stets parallel bleibt, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen einander gleich.

Die Gleichung $2(l^2+m^2)+cn=0$ repräsentirt ein Rotationsparaboloid, welches sich nach der negativen Seite der Z-Axe hin öffnet, die Coordinaten z können daher nur negative Werte annehmen. Der Coefficient von n^3 ist positiv, dann ergiebt sich:

VI. Gleitet die Basis mit ihrem Scheitel auf der Oberfläche des Rotationsparaboloides

$$l^2+m^2+\frac{a}{2}n=0,$$

während die Rotationsaxe sich stets parallel bleibt, so ändern sich erstens die Volumina der entsprechenden Wellenflächen nur, wenn die Entfernung des Poles von der Ebene $N=0$ ab oder zunimmt; und zweitens ist die Abnahme, welche das Volumen $V_0=\frac{64}{3}J_7a^3$ erleidet, proportional dem Kubus der genannten Entfernung. Dabei bedeutet V_0 das Volumen der Wellenfläche desjenigen Basisparaboloides, dessen Scheitel zusammenfällt mit dem Pole.

Der erste Teil dieses Satzes kann verallgemeinert werden (cf. Lehrs. III.). Wir wollen das Resultat in folgenden Satz kleiden:

VII. Bewegt sich die Basis derartig, dass ihr Scheitel auf einem der Kreisschnitte des Cylinders $l^2+m^2=c_1{}^2$, mit den Ebenen $z=\pm c_2{}^2$ gelegen ist, während ihre Rotationsaxe der Cylinderaxe parallel bleibt, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen constant.

Es sei $l=m=0$, $n=\frac{a}{4}$, dann fällt der Brennpunkt der Basis in den Pol und wir finden für das Volumen der Wellenfläche

$$V_f=\frac{\pi}{3}\frac{h}{2}a^2.$$

Nun hatten wir als Wellenfläche des Paraboloides für dieselbe Lage des Brennpunktes die Kreisebene deren Radius $=ah$, deren Abstand $n=\frac{a}{2}$ ist, gefunden[35]). Da ferner

$$V_f=\tfrac{1}{3}\pi(ah)\frac{a}{2}$$

geschrieben werden kann, so repräsentirt V_f den Inhalt des Kegels, dessen Basis jener Kreis, dessen Spitze der Pol ist. Die erste Formel

---

35) cf. die Formel 5).

$$V_f = \frac{\pi}{3}\frac{h}{2}a^2$$

ergiebt den Lehrsatz:

VIII. Das Volumen der zu einer paraboloidischen Calotte von der Höhe h gehörenden Wellenfläche ist gleich dem Inhalte eines Kreiskegels, dessen Höhe $\frac{h}{2}$, dessen Grundflächenradius die Constante a der Gleichung des Rotationsparaboloides ist.

§ 7.

Das hyperbolische Paraboloid.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

schneidet die Z-Ebene in den beiden geraden Linien

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad z = 0.$$

Die eine derselben $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$ möge die Y-Axe, die andere $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$ die X-Axe des neuen Coordinatensystemes sein, auf welches wir im Folgenden die Gleichung des Paraboloides bezogen denken. Die Z-Axe des neuen Systemes sei mit der ursprünglichen identisch, dann wird die Transformation durch die folgenden Gleichungen vermittelt:

$$x_1 = \frac{bx - ay}{2ab}\sqrt{a^2+b^2}, \quad y_1 = \frac{bx + ay}{2ab}\sqrt{a^2+b^2}, \quad z_1 = z$$

oder

$$x = (x_1 + y_1)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = -(x_1 - y_1)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = z_1.$$

Wird der Einfachheit wegen der Index 1 unterdrückt, so nimmt die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides die Form an

1) $$2xy = (a^2+b^2)z,$$

sie wird identisch erfüllt durch die Functionen

2) $$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{2}{a^2+b^2}uv.$$

Die Elimination von v führt zu den Gleichungen einer Geraden:

3) $$(a^2+b^2)z = 2uy, \quad x = u,$$

und wenn wir u eliminiren, ergiebt sich die gerade Linie:

4) $$(a^2+b^2)z = 2vx, \quad y = v.$$

Die Mantelfläche des hyperbolischen Paraboloides muss daher angesehen werden als das Continuum der Schnittpunkte jener beiden geraden Linien, deren analytisches Aequivalent die Gleichungen unter 3) und 4) sind. Aus ihnen resultirt, dass die erzeugenden Geraden resp. der X- und der Y-Ebene stets parallel sind, dass sie ferner in den Grenzfällen $u=0$, $v=0$ mit der Y- resp. X-Axe zusammenfallen.

Die drei Ebenen $x = 0$, $y = v$, $z = 0$ schneiden aus der Oberfläche des Paraboloides ein zusammenhängendes Stück heraus, welches unter der Voraussetzung, dass u und v positive endliche Grössen sind, von der positiven X- und Y-Axe und den Geraden

$$(a^2+b^2)z = 2uy, \quad x = u, \quad (a^2+b^2)z = 2vx, \quad y = v$$

begrenzt wird. Die Coordinaten x, y, z werden der Reihe nach die sämtlichen Punkte des definirten Oberflächenstückes darstellen, wenn

u zwischen den Grenzen 0 und u,
v „ „ „ 0 und v

variirt.

Durch eine parallele Verschiebung des Coordinatensystemes, der Art, dass der Nullpunkt in den Pol $(-l, -m, -n)$ hineinfällt, nehmen die Coordinaten des hyperbolischen Paraboloides die Gestalt an

5) $$x = l+u, \quad y = m+v, \quad z = n+\frac{2uv}{a^2+b^2}$$

Die partielle Differentiation ergiebt

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2v}{a^2+b^2},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{a^2+b^2},$$

wir finden für die Determinanten folgende Ausdrücke

$$A = -\frac{2v}{a^2+b^2}, \quad B = -\frac{2u}{a^2+b^2}, \quad C = 1$$

ferner

$$S^2 = \frac{4(u^2+v^2)+(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Setzen wir

$$6) \qquad M = 2uv + 2lv + 2mu - n(a^2 + b^2)$$

so ergeben die in § 1. aufgestellten Formeln folgende Darstellung der Coordinaten der Wellenfläche des Paraboloides

$$7) \qquad x_1 = \frac{4Mv}{(a^2+b^2)^2 S^2}, \qquad y_1 = \frac{4Mu}{(a^2+b^2)^2 S^2}, \qquad z_1 = \frac{-2M}{(a^2+b^2)^2 S^2}$$

Die Fläche ist nicht geschlossen, wir haben demnach ihrer Kubatur die Formel

$$V = \tfrac{1}{3} \int r\, ds \cos(Nr)$$

zu Grunde zu legen, sie erfordert die Bestimmung der Determinanten A_1, B_1, C_1. Differentiiren wir die Gleichungen in 7) partiell, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{4v}{(a^2+b^2)^2 S^4}\left\{\frac{\partial M}{\partial u} S^2 - M\frac{\partial S^2}{\partial u}\right\}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{4}{(a^2+b^2)^2 S^4}\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial v} v + M\right) S^2 - Mv\frac{\partial S^2}{\partial v}\right\}, \\
\frac{\partial y_1}{\partial u} &= \frac{4}{(a^2+b^2)^2 S^4}\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial u} u + M\right) S^2 - Mu\frac{\partial S^2}{\partial u}\right\}, \\
\frac{\partial y_1}{\partial v} &= \frac{4u}{(a^2+b^2)^2 S^4}\left\{\frac{\partial M}{\partial v} S^2 - M\frac{\partial S^2}{\partial v}\right\}, \\
\frac{\partial z_1}{\partial u} &= \frac{-2}{(a^2+b^2) S^4}\left\{\frac{\partial M}{\partial u} S^2 - M\frac{\partial S^2}{\partial u}\right\}, \\
\frac{\partial z_1}{\partial v} &= \frac{-2}{(a^2+b^2) S^4}\left\{\frac{\partial M}{\partial v} S^2 - M\frac{\partial S^2}{\partial v}\right\}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich leicht die folgenden ableiten:

$$8) \qquad A_1 = -\frac{8M}{(a^2+b^2)^3 S^6}\left\{\frac{\partial M}{\partial v} S^2 - M\frac{\partial S^2}{\partial v}\right\},$$

$$B_1 = -\frac{8M}{(a^2+b^2)^3 S^6}\left\{\frac{\partial M}{\partial u} S^2 - M\frac{\partial S^2}{\partial u}\right\},$$

$$C_1 = -\frac{16M}{(a^2+b^2)^4 S^6}\left\{\left(M + \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial v} v\right) S^2 - M\left(\frac{\partial S^2}{\partial v} v + \frac{\partial S^2}{\partial u} u\right)\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$V = \tfrac{1}{3} \int_0^v \int_0^u (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1) du\, dv$$

erhalten wir

$$V = \frac{32}{3}(a^2+b^2) \int_0^v \int_0^u \frac{(2uv+2lv+2mu-n(a^2+b^2))^3}{(4(u^2+v^2)+(a^2+b^2)^2)^3}\, du\, dv.$$

Durch die Entwickelung von $(2uv+2lv+2mu-(a^2+b^2)n^3)$ und gliedweise Integration wird die Kubatur der Wellenfläche reducirt auf die Auswertung von zwanzig Doppelintegralen, deren allgemeine Form die nachstehende ist

$$9) \qquad \int_0^v \int_0^u \frac{u^k v^i\, du\, dv}{(4u^2+4v^2+(a^2+b^2)^2)^3} = I_{k,i},$$

dabei kann sowohl k als i gleich 0, 1, 2, 3 sein.

Sei $a^2+b^2 = c$, so wird die Berechnung der Grössen $I_{k,i}$ vermöge der Formel

$$10) \qquad \int_0^u \int_0^v \frac{u^k v^i\, du\, dv}{(4u^2-4v^2+c^2)^3} = -\frac{1}{4c}\frac{\partial}{\partial c} \int_0^u \int_0^v \frac{u^k v^i\, du\, dv}{(4u^2+4v^2+c^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{4c} I_{ki}'$$

auf die Auswertung einfacherer Doppelintegrale zurückgeführt.

Wir gelangen zu der folgenden Formel für das gesuchte Volumen

$$11)$$

$$V = \frac{32}{3} \left\{ \begin{array}{l} 8l^3 I_{0,3} + 8m^3 I_{3,0} - n^3c^3 I_{0,0} + 24l^2 m I_{1,2} + 24lm^2 I_{2,1} - \\ -12l^2 nc I_{0,2} + 6ln^2c^2 I_{0,1} - 12m^2 nc I_{2,0} + 6mn^2c^2 I_{1,0} - \\ -24lmnc I_{1,1} + 24l^2 I_{1,3} + 24m^2 I_{3,1} + 48lm I_{2,2} - 24lnc I_{1,2} + \\ 6n^2c^2 I_{1,1} - 24mnc I_{2,1} + 24l I_{2,3} + 24m I_{3,2} - 12nc I_{2,2} + 8I_{3,3} \end{array} \right\}$$

in welcher die Grössen I von Null verschiedene positive Werte besitzen.

Aus der Formel der Doppelintegrale geht auch hervor, dass wir von den 20 Grössen $I_{k,i}$ nur 10 auszuwerten brauchen, alle übrigen lassen sich aus ihnen durch Vertauschung der Veränderlichen u und v ableiten.

Wir erhalten:

$$I_{0,3} = \frac{1}{128c}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{c} - \frac{6v^2+c^2}{128(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} - \frac{uv^2}{32(4v^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)}$$

$$I_{0,0} = \frac{u}{64vc^2}\frac{(12v^2+c^2)(4u^2+c^2)+12v^2(4v^2+c^2)}{(4u^2+4v^2+c^2)(4u^2+c^2)(4v^2+c^2)} + \frac{c^2}{256v^3(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{4v^2+c^2}} - \frac{1}{255cv^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{c} + \frac{1}{c^2+{z_2}^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4vz_2}{c^2+{z_2}^2} - \frac{1}{c_2+{z_1}^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4vz_1}{c^2+{z_1}^2}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{4v^2+c^2}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{R_1}\frac{c^2+{R_1}^2}{c^2-{R_1}^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{R_1(z_2-z_1)}{{R_1}^2+z_2z_1} - \\ - \frac{1}{R_2}\frac{c^2+{R_2}^2}{c^2-{R_2}^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{R_2(z_2-z_1)}{{R_2}^2+z_2z_1} \\ - \frac{2c({R_1}^2-{R_2}^2)}{(c^2-{R_1}^2)(c^2-{R_2}^2)}\operatorname{arc\,tg}\frac{c(z_2-z_1)}{c^2+z_2z_1} \end{array}\right\}$$

Dabei ist zu setzen

$$R_1 = \sqrt{4v^2+c^2}-2v, \quad R_2 = \sqrt{4v^2+c^2}+2v$$
$$z_1 = c, \qquad\qquad z_2 = \sqrt{4u^2+c^2}-2u.$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{32}\left\{\frac{1}{8c}\operatorname{arc\,tg}\frac{2v}{c} - \frac{1}{8\sqrt{4u^2+c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2v}{\sqrt{4u^2+c^2}} - \frac{vu^2}{(4v^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)}\right\},$$

$$I_{0,2} = \frac{1}{256\,cv}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{c} - \frac{c^2+8v^2}{256\,v(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} - \frac{uv}{32(4v^2+c^2)(4u^3+4v^3+c^2)} + \frac{1}{64}\left(\frac{1}{c^2+{z_2}^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4vz^2}{c^2+{z_1}^2} - \frac{1}{c^2+{z_1}^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4vz_1}{c_2+{z_1}^2}\right)$$

$$-\frac{1}{128\sqrt{4v^2+c^2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{R_1}\,\frac{c^2+R_1^2}{c^2-R_1^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{R_1(z_2-z_1)}{R_1^2-z_2z_1}\\ -\frac{1}{R_2}\,\frac{c^2+R_2^2}{c^2-R_1^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{R_2(z_2-z_1)}{R_2^2-z_2z_1}\\ +\frac{2c(R_2^2-R_1^2)}{(c^2-R_2^2)(c^2-R_1^2)}\operatorname{arc\,tg}\frac{c(z_2-z_1)}{c^2-z_2z_1}\end{array}\right\}$$

$$I_{0,1}=\frac{1}{64c}\left\{\begin{array}{l}+\frac{1}{c^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{c}-\frac{c}{(4v^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{4v^2+c^2}}\\ \frac{8uv^2(4u^2+4v^2+2c^2)}{c(4v^2+c^2)(4u^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)}\end{array}\right\}$$

$$I_{11}=\frac{u^2v^2(2u^2+2v^2+c^2)}{4c^2(4v^2+c^2)(4u^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)},$$

$$I_{13}=\frac{1}{512}\log\frac{(4u^2+c^2)(4v^2+c^2)}{c^2(4u^2+4v^2+c^2)}-\frac{u^2v^2}{32(4u^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)},$$

Das Integral I_{22} lässt sich nicht vollständig durch die algebraischen Functionen, den Logarithmus und die Arcustangente darstellen, sondern führt auf transcendente Functionen anderer Art.

$$I_{2,2}=\frac{c^2}{1024v\sqrt{4v^2+c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{\sqrt{av^2+c^2}}+\frac{uv}{128(4u^2+4v^2+c^2)}$$
$$-\frac{c}{1024v}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{c}$$
$$+\frac{1}{512}\left\{\left(\log z_1+\frac{2c^2}{c^2+z_1^2}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{4vz_1}{c^2+z_1}\right.$$
$$\left.-\left(\log z_2+\frac{2c^2}{c^2+z_2^2}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{4vz_2}{c^2+z_2}\right\}$$
$$+\frac{c^2}{512\sqrt{4v^2+c^2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{R_1^2}\,\frac{c^2+R_1^2}{c^2-R_1^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{R_1(z_2-z_1)}{R_1^2-z_2z_1}\\ -\frac{1}{R_2^2}\,\frac{c^2+R_2^2}{c^2-R_1^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{R_2(z_2-z_1)}{R_2^2-z_2z_1}\\ -\frac{2c(R_1^2-R_2^2)}{(c^2-R_1^2)(c^2-R_2^2)}\operatorname{arc\,tg}\frac{c(z_2-z_1)}{c_2-z_2z_1}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{1024\sqrt{4v^2+c^2}}\left\{(c^2+R_1^2)\int_{z_1}^{z_2}\frac{\log z\,dz}{z^2+R_1^2}-(c^2+R_2^2)\int_{z_1}^{z_2}\frac{\log z\,dz}{z^2+R_2^2}\right\}.$$

Die Transcendenten $\int_{z_1}^{z_2} \frac{\log z\, dz}{z^2+R_1^2}$, $\int_{z_1}^{z_2} \frac{\log z\, dz}{z^2+R_2^2}$ lassen sich für die Gezen 0 und 1 auf eine einfache Gestalt reduciren [36]), doch ist es leicht einzusehen, dass für u und v keine Werte gefunden werden können, der Art, dass $z_1 = 1$ und zugleich $z_2 = 0$ wird.

Es ergiebt sich ferner:

$$I_{2,3} = \frac{c^2+2v^2}{512\sqrt{4v^2+c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} - \frac{c}{512} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{c} + \frac{uv^2}{128(4u^2+4v^2+c^2)}$$

$$I_{3,3} = \frac{u^2v^2}{128(4u^2+4v^2+c^2)} + \frac{c^2}{2048} \log \text{nat} \frac{(4v^2+c^2)(4u^2+c^2)}{(4u^2+4v^2+c^2)c^2}.$$

Alle übrigen Coefficienten I lassen sich aus den aufgesttelten unmittelbar herleiten, dann aber ergiebt sich aus 11) der Lehrsatz:

I. Der geometrische Ort der Pole, zu denen ein und dasselbe Volumen der Wellenfläche gehört, die einem endlichen Oberflächenstück des hyperbolischen Paraboloides entspricht, ist eine Oberfläche dritter Ordnung; und dessen Umkehrung.

II. Bewegt sich das in der früher definirten Weise begrenzte Oberflächenstück des hyperbolischen Paraboloides so, dass erstens die begrenzenden Linien sich stets parallel bleiben, dass ferner der Schnittpunkt derjenigen Geraden, die der X- und Y-Axe resp. gleichgerichtet sind, auf einer Oberfläche dritter Ordnung $V = \text{Const}$ gleitet, so sind die Volumina der entsprechenden auf den Coordinatenanfang bezogenen Wellenflächen einander gleich.

Durch die complicirte Form der Grössen I und namentlich durch den Umstand, dass das Doppelintegral $I_{2,2}$ auf eine transcendente Function führt, wird es unmöglich, in ähnlicher Weise wie bei den vorhergehenden Flächen eine grössere Reihe von Lehrsätzen aufzustellen. Immerhin aber dürften die Untersuchungen die Theorie der Fusspunktflächen etwas weiter geführt und in eigentümlicher Weise beleuchtet haben.

Zum Schlusse kann ich nicht umhin, eine angenehme Pflicht zu erfüllen, es auszusprechen, dass die lebhafteste Anregung und dauernde Hilfe mir aus dem Interesse erwuchs, dass Herr Prof. Krause, dem ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank sage, der vorliegenden Arbeit entgegenbrachte.

36) cf. Bertrand, Calcul différentiel et intégral.